CH-18-Intervalle de fluctuation et Estimation

I- Intervalle de fluctuation (sert à accepter ou à rejeter une hypothèse)

1) Echantillon et intervalle de fluctuation asymptotique

- Un « échantillon de taille n » correspond aux résultats obtenus après avoir répété n fois une expérience aléatoire de manière indépendante.

Exemple : On lance 80 fois une pièce de monnaie et on obtient 35 fois le résultat « pile ».

Remarque : Cet échantillon donne donc une proportion (fréquence), $f =$ pour le nombre de « pile » obtenu.

- On s'intéresse ensuite à la probabilité théorique p d'obtenir le résultat étudié.

Exemple : Si on suppose que la pièce est bien équilibré (non truqué), alors la probabilité d'obtenir « pile » est théoriquement de $p =$.

- Dans l'objectif de valider ou non cette hypothèse à l'aide de notre échantillon expérimentale, on calcule « l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la proportion étudié dans un échantillon de taille n » qui correspond à :

Remarques :

- Les bornes de cet intervalle dépendent de la taille n de l'échantillon et il est centré autour de la probabilité théorique p.
- Plus n est grand et plus l'intervalle se « resserre » autour de la valeur p.
- Conditions : intervalle valable si :

Exemple : Dans la situation précédente, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion de « pile » obtenu dans l'échantillon de taille ……… est :

- On peut être amené à faire des études avec un seuil de confiance différent de 95%. De manière générale, on a donc la définition suivante :

Définition : L'intervalle est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance $(1-\alpha)$ de la proportion étudié dans un échantillon de taille n.

Exemple : Dans le cas où $= 0{,}05$, alors $1-\alpha = 0{,}95$ soit 95% , et on retrouve le fait que : $u_{0,05} = 1{,}96$

2) Prise de décision (accepté ou rejeté une hypothèse)

- Il faut faire une hypothèse pour proposer une probabilité théorique p.

Exemple : On a supposé que la pièce était bien équilibré, ce qui a donné $p =$.

- On va accepter ou rejeter cette hypothèse en analysant notre échantillon via l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance $(1-\alpha)$ que l'on notera I.

La règle de décision est la suivante : ➢ Si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse avec un niveau de confiance de $(1-\alpha)$ (on dit aussi avec un risque d'erreur de α) ➢ Si $f \notin I$, alors on rejette l'hypothèse avec un niveau de confiance de $(1-\alpha)$ (on dit aussi avec un risque d'erreur de α)

Exemple : Dans l'étude précédente, on a : $f =$

Or,

Donc on …………………………… l'hypothèse selon laquelle la pièce est bien équilibré avec ………………………………

……………………………………………………………………………… .

Exercice : On prend une autre pièce du porte monnaie et on la lance 400 fois. On obtient cette fois-ci 175 « pile ».

Peut-on accepter ou non l'hypothèse $p = 0{,}5$ au seuil de risque 5% ?

II- Estimation d'une proportion (sert à estimer une proportion inconnue)

1) Intervalle de confiance

Pour des raisons de coût et de faisabilité, on ne peut pas toujours étudier toute la population. (C'est par exemple le cas lorsque l'on réalise un sondage).

On chercher à « estimer » la proportion inconnue p d'individus ayant une certaine propriété. (Par exemple la proportion de client satisfait par un service).

Pour cela, on sélectionne aléatoirement un échantillon de taille n de cette population et on calcule la fréquence f des individus qui ont cette propriété.

Enfin, on pourra en déduire que la proportion inconnue p appartient à l'intervalle ………………………… avec un risque d'erreur de 5%.

<u>Définition :</u> L'intervalle   est appelé un « intervalle de confiance de la proportion inconnue p avec un niveau de confiance $0{,}95$.

2) Taille minimale de l'échantillon pour avoir une précision donnée

Avec un niveau de confiance de $0{,}95$ l'amplitude de l'intervalle de confiance est de : ……… (écart entre les 2 bornes).

Ainsi, plus n est grand et plus l'intervalle devient précis (les bornes se resserrent).

On peut vous demandez de déterminer la valeur de n à partir de laquelle la longueur de l'intervalle devient plus petit qu'une certaine valeur « a » .

<u>Il faudra alors résoudre</u> :

<u>Exemple</u> :