Exercice 101 p 183

101 Pour tout entier n supérieur à 0, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x+x^2}$ et la suite (I_n) par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

1. Montrer que cette suite est bien définie.

2. Étudier son sens de variation.

3. Démontrer que l'on a $\dfrac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)}$.

4. En déduire la convergence de la suite (I_n).

ex 101 p 183. (+ animation Geogebra pour voir l'évolution des f_n et de I_n).

1) Pour tout entier $n \geq 0$, la fonction f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0;1]$. (car le dénominateur ne s'annule pas : $\Delta = -3 < 0 \to$ pas de racines)

Ainsi, l'intégrale de f_n est bien définie et donc (I_n) est bien définie.

2) $$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$$

"méthode universelle pour les intégrales"

"quand le "n" est l'intégrale."

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x+x^2}\,dx \quad \text{(d'après la linéarité de l'intégrale)}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}\,dx$$

"on regroupe tout sous une seule intégrale et on étudie le signe de la fonction qui est en dessous"

OR, on a :

x	0		1
x^n	0	+	
$(x-1)$		−	0
$1+x+x^2$		+	
$\frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}$	0	−	0

du signe de $a = 1 > 0$ tout le temps.

d'où $\frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} \leq 0$ pour tout $x \in [0;1]$

donc $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}\,dx \leq \int_0^1 0\,dx$ (car $0 \leq 1$) "on explique que les bornes sont rangés dans le bon ordre".

Ainsi : $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et (I_n) est décroissante.

3) Pour tout $x \in [0;1]$, on a : $1 \leq 1+x+x^2 \leq 3$.

donc : $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{1+x+x^2} \geq \frac{1}{3}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$)

d'où $x^n \geq \frac{x^n}{1+x+x^2} \geq \frac{x^n}{3}$ (car $x^n \geq 0$)

donc $$\frac{x^n}{3} \leq f_n(x) \leq x^n$$ "question intermédiaire au BAC".

ainsi, on a : $\int_0^1 \frac{x^n}{3}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx \leq \int_0^1 x^n dx$.

$$\frac{1}{3}\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

or, $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 g(x)dx$ avec $g(x) = x^n$

et $G(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ est une primitive de g sur $[0;1]$

Donc $\int_0^1 x^n dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{n+1} \times 1^{n+1} - \frac{1}{n+1} \times 0^{n+1} = \frac{1}{n+1}$

d'où $$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

4) on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0\end{array}\right\}$ Par le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Ainsi : la suite (I_n) converge vers 0.

Sujet A p 191 du livre

Sujet A ROC

Capacités mises en œuvre

- *Vérifier qu'une fonction F est une primitive*
- *Déterminer un encadrement d'une intégrale*
- *Déterminer une aire en utilisant le calcul intégral*

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis :

- *Si f est une fonction continue et positive sur [a ; b], alors la fonction G telle que* $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *est dérivable et sa dérivée est égale à f.*
- *Si G est une primitive d'une fonction f, alors toutes les primitives de f sont de la forme G + k.*

En utilisant les prérequis précédents, démontrer que, si F est une primitive d'une fonction f continue et positive, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x)=\ln(1+x^n)$ et on pose :

$$I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f_1 sur $[0\,;+\infty[$.

c. Justifier que la fonction f_1 est positive sur $[0\,;+\infty[$.

d. Construire la courbe représentative de la fonction f_1.

2. a. Démontrer que la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)$ est une primitive de la fonction f_1 sur $[0\,;+\infty[$.

b. Calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$0\leqslant I_n\leqslant \ln 2.$$

b. Étudier les variations de la suite (I_n).

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

4. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-x$.

a. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0\,;+\infty[$.

c. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a $\ln(1+x^n)\leqslant x^n$.

d. En déduire la limite de la suite (I_n).

Sujet Ⓐ p 191. du livre.

A] ROC On sait que G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

Si on considère F une primitive quelconque de f, alors on a : $F(x) = G(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Donc $F(b) - F(a) = (G(b) + k) - (G(a) + k) = G(b) - G(a)$

$= \int_a^b f(t)dt - \cancel{\int_a^a f(t)dt}$

$= \int_a^b f(t)dt$ CQFD.

B] 1) ⓐ $f_1(x) = \ln(1+x) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = 1+x$.

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

puis, $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

Par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$

ⓑ $f_1'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{1+x}$

or, $x \in [0;+\infty[$, donc $1+x > 0$ et $f_1'(x) > 0$.

Ainsi : f_1 est croissante sur $[0;+\infty[$

ⓒ Si on a : $x \geqslant 0$

alors $f_1(x) \geqslant f_1(0)$ (car f_1 est croissante sur $[0;+\infty[$)

donc $f_1(x) \geqslant 0$ (car $f_1(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$)

Ainsi : f_1 est positive sur $[0;+\infty[$

ⓓ Fait avec Geogebra.

2) ⓐ $F(x) = u(x) \times v(x) - x + \ln(1+x)$, avec $u(x) = x$ $u'(x) = 1$

$v(x) = \ln(1+x)$ $v'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

d'où $F'(x) = u'v + uv' - 1 + \dfrac{1}{1+x}$

$= 1 \times \ln(1+x) + x \times \dfrac{1}{1+x} - 1 + \dfrac{1}{1+x}$

$= \ln(1+x) + \dfrac{x - (1+x) + 1}{1+x}$

$= \ln(1+x) + \dfrac{0}{1+x} = \ln(1+x) = f_1(x)$.

Ainsi F est une primitive de f_1 sur $[0;+\infty[$.

ⓑ $I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = F(1) - F(0) = (1 \times \ln(1+1) - 1 + \ln(1+1)) - (0 \times \ln(1+0) - 0 + \ln(1+0))$

$= \ln(2) - 1 + \ln(2) - 0$

$= 2\ln(2) - 1$

Interprétation graphique :

Graphiquement, comme f_1 est positive, le calcul de I_1 correspond à l'aire, en unité d'aire, du domaine sous la courbe de f_1 entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

3) (a) Pour $x \in [0;1]$, on a : $0 \leq x^n \leq 1$

donc : $1 \leq 1+x^n \leq 2$

d'où : $\ln(1) \leq \ln(1+x^n) \leq \ln(2)$ (car $\ln(.)$ est croissante sur $]0;+\infty[$).

$0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln(2)$

$0 \leq f_n(x) \leq \ln(2)$

À retenir : Pour encadrer une intégrale, il faut commencer par encadrer la fonction sous l'intégrale

donc $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 \ln(2)\,dx$ (car $0<1$)

$0 \leq I_n \leq \ln(2) \times (1-0)$

Ainsi : $0 \leq I_n \leq \ln(2)$

(b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$= \int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\,dx - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$

$= \int_0^1 \left(\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)\right) dx$

comme $x \in [0;1]$, on a : $x^{n+1} \leq x^n$ (car $x^{n+1} - x^n = \underbrace{x^n}_{\geq 0}(\underbrace{x-1}_{\leq 0}) \leq 0$)

donc $1+x^{n+1} \leq 1+x^n$

d'où $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$ (car $\ln()$ est croissante sur $]0;+\infty[$)

ainsi : $\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n) \leq 0$ et $\int_0^1 (\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n))\,dx \leq 0$

conclusion : $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et (I_n) est décroissante.

(c) (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

4) (a) $g(x) = \ln(1+x) - x$ $\quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

x	0		$+\infty$
$-x$	0	$-$	
$1+x$		$+$	
$g'(x)$	0	$-$	

d'où $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $[0;+\infty[$

(b) Si on a : $x \geq 0$

alors $g(x) \leq g(0)$ (car g est décroissante sur $[0;+\infty[$)

donc $g(x) \leq 0$ (car $g(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln(1) = 0$)

(c) Si $x \geq 0$, alors $x^n \geq 0$ et d'après (b), on a : $g(x^n) \leq 0$ donc $\ln(1+x^n) - x^n \leq 0$

d'où $\ln(1+x^n) \leq x^n$

(d) D'après 3)(a) et 4(c), on a : $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, pour tout $x \in [0;+\infty[$

donc $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$

d'où $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Ainsi : (I_n) converge vers 0.