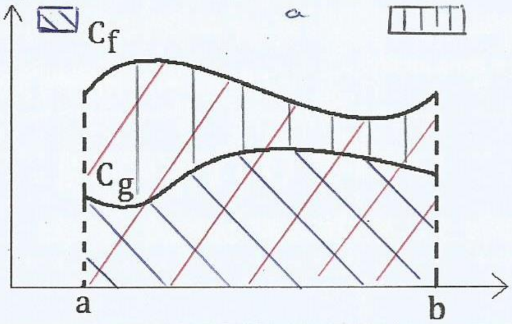
II] Applications du calcul intégral

1) Surface entre 2 courbes

Propriété : Si f et g sont deux fonctions continue sur $[a;b]$, telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors l'aire, en unités d'aires, de la surface entre les courbes C_f et C_g et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ se calcule en faisant: qui est aussi égale à

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$



Exercice 106 p 183

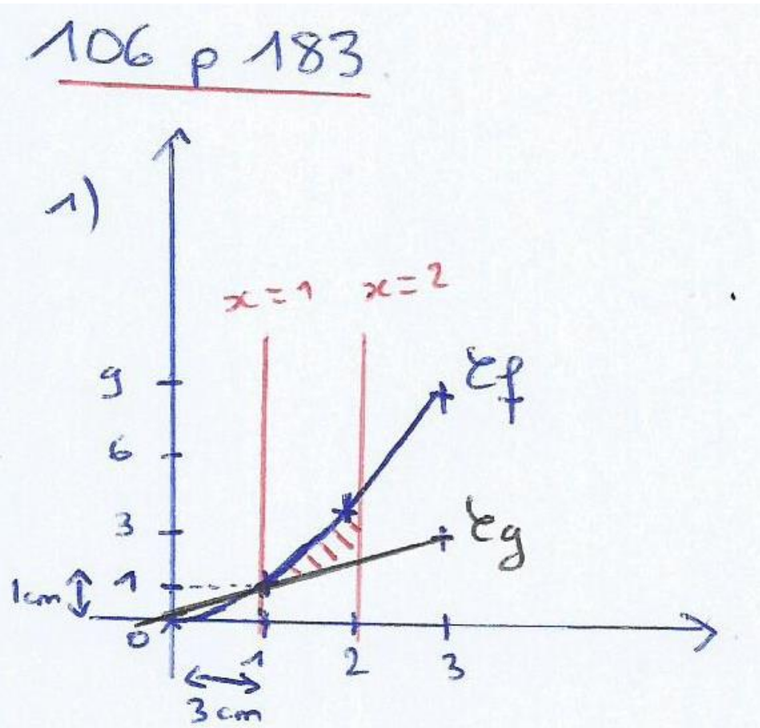
106 Soit f et g les fonctions définies sur $[1 ; 2]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de ces deux fonctions dans un même repère orthogonal d'unités 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Construire les courbes représentatives de f et g dans un même repère.

2. a. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

b. Donner l'aire de cette surface en cm^2.

Corrigé exercice 106 p 183



2) ⓐ $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\,dx - \int_1^2 g(x)\,dx$

$$= \int_1^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

$$= \int_1^2 (x^2 - x)\,dx$$

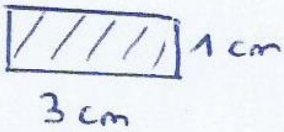
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{6}\ u.a}}$$

ⓑ Pour convertir les u.a en cm^2, il faut se servir des unités.

Ici, on a : $1\,u.a =$ 

donc $1\,u.a = 3\,cm^2$

d'où $\frac{5}{6}\,u.a = ?\,cm^2$

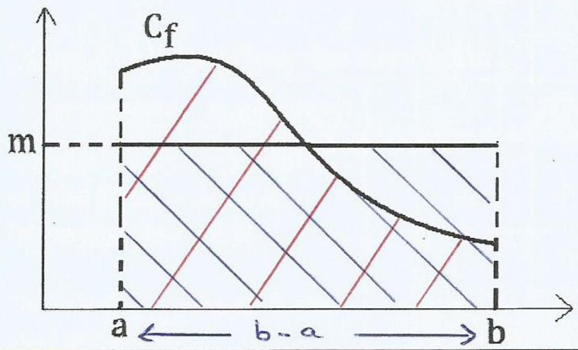
Ainsi : $\mathcal{A} = \left(\frac{5}{6} \times 3\right) \div 1 = \underline{\underline{\frac{15}{6}\ cm^2}}$

2) Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, on appelle « valeur moyenne de f sur $[a;b]$ » le nombre suivant : $m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$ ♡

Remarque : Graphiquement m correspond au niveau que devrait avoir f tout en conservant la même aire.

Illustration :



Démonstration:

$$\int_a^b f(x)\,dx = m \times (b-a)$$

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = m$$

$$\text{d'où } m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple : Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[2\,;7]$

$$m = \frac{1}{7-2} \times \int_2^7 x^2\,dx = \frac{1}{5} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^7 = \frac{1}{5} \times \left(\frac{7^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{343}{3} - \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{67}{3} \simeq 22{,}3.$$

➔ **Exercice 116 p 184** (partie exercice).

Exercice 114 p 184

114 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{2-x}$.

1. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-x-1)\,e^{2-x}$ est une primitive de la fonction f.

2. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0\,;4]$.

Corrigé exercice 114 p 184

114 p 184

1) $F(x) = u \times v$ avec $\begin{cases} u = -x-1 & u' = -1 \\ v = e^{2-x} & v' = -e^{2-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'v + uv' \\ &= (-1)\times e^{2-x} + (-x-1)\times(-e^{2-x}) \\ &= -e^{2-x} + xe^{2-x} + e^{2-x} \\ &= e^{2-x}(-1+x+1) \\ &= \underline{\underline{xe^{2-x}}} \end{aligned}$$

donc <u>F est une primitive de f sur ℝ.</u>

2) $$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\,dx \end{aligned}$$

OR, $$\begin{aligned} \int_0^4 f(x)\,dx &= \left[F(x)\right]_0^4 \\ &= F(4) - F(0) \\ &= -5e^{-2} - (-e^{2}) \\ &= \underline{\underline{e^2 - 5e^{-2}}} \end{aligned}$$

puis $\boxed{m = \frac{1}{4}(e^2 - 5e^{-2})}$

Exercice 107 p 183

107 Soit f et g les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2 \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un même repère.

1. Démontrer que si $x>1$, alors $x^2>\frac{1}{x}$.

2. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

Corrigé exercice 107 p 183

exercice 107 p 183

1) Pour étudier la position relative de f par rapport à g, on étudie le signe de la différence : $f(x)-g(x)$

or, $f(x)-g(x) = x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3-1}{x} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}$

"plus pour le supérieur" "racine évidente"

$x^3-1=0$

$x^3=1$

$x=1$

x	1		$+\infty$
x^3-1	0	$+$	
x		$+$	
$f-g$	0	$+$	
position relative		au-dessus.	

donc $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in]1;+\infty[$

donc $x^2 > \frac{1}{x}$ pour tout $x > 1$

2) $\mathcal{A} = \int_1^e (f(x) - g(x))\,dx$

$= \int_1^e \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \ln(x)\right]_1^e$

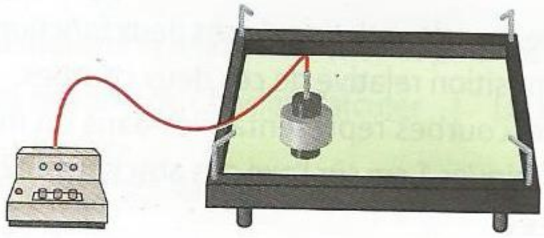
$= \left(\frac{e^3}{3} - \ln(e)\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \ln(1)\right)$

$= \frac{e^3}{3} - 1 - \frac{1}{3}$

$= \underline{\underline{\frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}}}$

Exercice 116 p 184

116 Un point mobile est étudié sur l'intervalle de temps [0 ; 20]. Le temps est exprimé en secondes. Sa vitesse en $m \cdot s^{-1}$ est donnée par $v(t) = 2t^2 + 3t$.



1. Calculer la distance parcourue par ce mobile sur cet intervalle de temps.

2. a. Calculer la valeur moyenne de la fonction v sur [0 ; 20].

b. Que représente cette valeur moyenne ?

Corrigé exercice 116 p 184

exercice 116 p 184

1) Pour calculer la distance parcourue, il faut intégrer la vitesse (car $d' = v$) donc $d = \int v$.

Donc $d = \int_0^{20} v(t)\,dt = \int_0^{20} (2t^2 + 3t)\,dt$

or, $V(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2$ est une primitive de v sur $[0; 20]$

d'où $d = \left(\frac{2}{3} \times 20^3 + \frac{3}{2} \times 20^2\right) - \left(\frac{2}{3} \times 0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2\right) = \frac{17\,800}{3} \simeq 5933$ mètres

2) a) $m = \frac{1}{20-0} \int_0^{20} v(t)\,dt = \frac{1}{20} \times \frac{17800}{3} = \frac{890}{3} \simeq 297$ m/s

b) vitesse moyenne du mobile pendant l'expérience.