Chapitre - 17 – Lois à densités (Partie II)

Rappels : Lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi de densité f alors on calcule les probabilités liées à X grâce à l'intégrale de sa densité.

En effet, on a vu que l'on avait : $p(a \leq X \leq b) =$

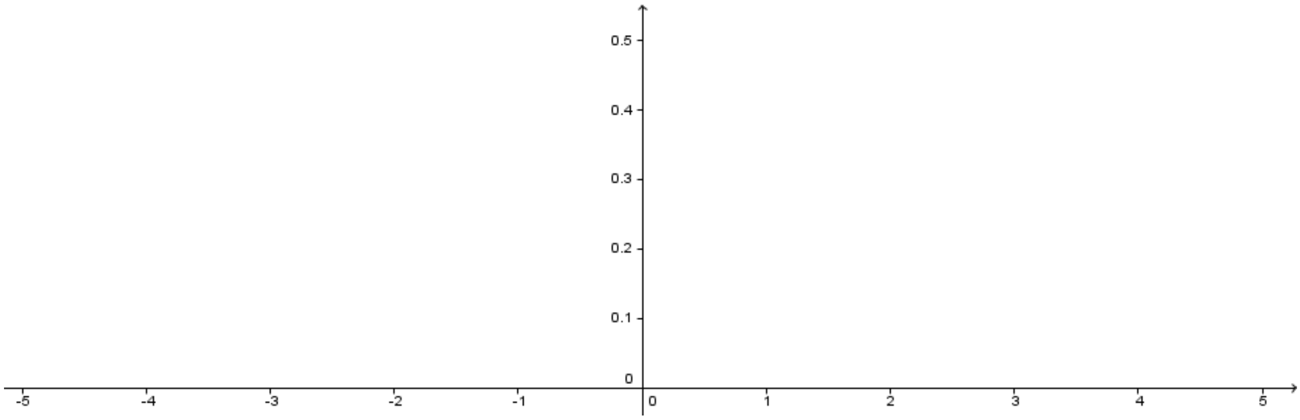
Ainsi, $p(a \leq X \leq b)$ correspond à l'aire sous la courbe de entre et .

I] Loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$

1) Définition et premières propriétés

Définition : Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, noté $N(0\,;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

Voici la représentation graphique de cette densité :



Remarques :

- L'exponentielle étant la courbe se rapproche de
- On parle de courbe

Propriétés : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

(1) f est et sur $\mathbb{R}$.

(2) L'aire totale sous la courbe est égale à

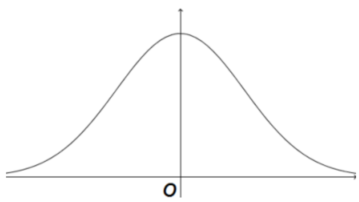
(3) La courbe est par rapport à l'axe

2) Utilisation de la calculatrice

a) Pour calculer une probabilité $p(a \leq X \leq b)$ lorsque l'on connaît a et b.

Schématiquement : On cherche à déterminer l'aire sous la courbe entre a et b.

Instruction à la calculatrice : 2^{nd} + var , 2 : normalFrép(, , ,)

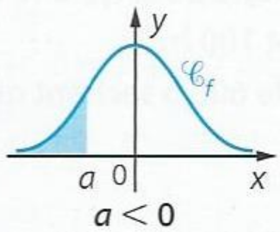
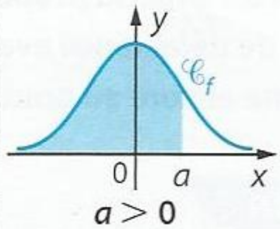
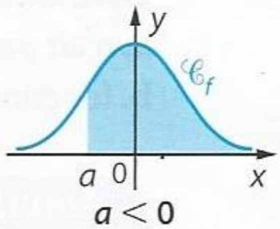
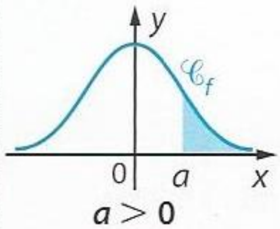


Exemple : X suit la loi normale $N(0\,;1)$, on a :

- $p(1 < X \leq 2) =$……………………………………………………………………………………≈…………………
- $p(-0{,}5 < X \leq 1{,}3) =$……………………………………………………………………………≈…………………
- $p(-1{,}5 \leq X < -0{,}5) =$…………………………………………………………………………≈…………………

Remarque : Du fait de la symétrie de la courbe de la densité , on a : $p(X \leq 0) = p(X \geq 0) =$………

Les calculatrices ne fournissant que des probabilités sous la forme $p(a \leq X \leq b)$, on utilisera la méthode décrite dans le tableau ci-dessous pour les calculs du type $p(X < a)$ ou $p(X > a)$.

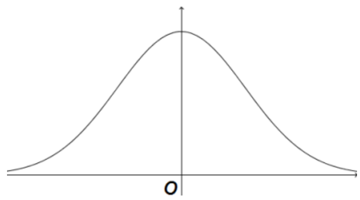
Probabilité	$P(X<a)$ pour $a<0$	$P(X<a)$ pour $a>0$	$P(X>a)$ pour $a<0$	$P(X>a)$ pour $a>0$
Graphique				
Calcul				

Exemple : X suit la loi normale $N(0\,;1)$, on a :

- $p(X > -0{,}3) =$……
- $p(X \leq 1{,}4) =$……
- $p(X \geq 0{,}8) =$……
- $p(X < -0{,}6) =$……

b) Pour déterminer la valeur de a lorsque l'on connaît la probabilité p correspondant à $p(X \leq a)$

Schématiquement : On cherche à déterminer le seuil a pour que l'aire sous la courbe avant a soit égale à p



Instruction à la calculatrice : 2nd + var , 3 : FracNormale(, ,)

Exemple : X suit la loi normale $N(0\,;1)$.

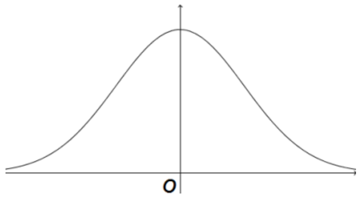
- Déterminer le réel a tel que : $P(X \leq a) = 0{,}7$
- Déterminer le réel b tel que : $P(X < b) = 0{,}4$
- Déterminer le réel c tel que : $P(X \geq c) = 0{,}2$
- Déterminer le réel d tel que : $P(-d \leq X \leq d) = 0{,}95$

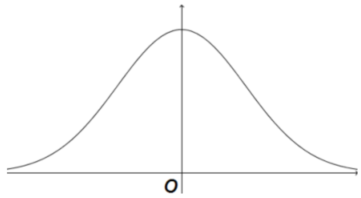
3) Propriétés de la loi normale $N(0;1)$

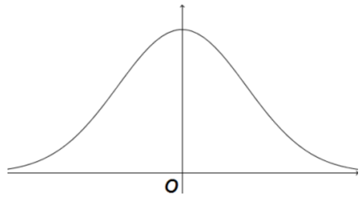
a) Règles de calculs

Propriété : Pour tous les réels $a > 0$, on a :

(1) $P(X \leq -a) =$ (2) $P(X \leq -a) =$ (3) $P(-a \leq X \leq a) =$







b) Valeurs remarquables liées à la loi normale centrée réduite

Théorème : Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel $\propto \in]0;1[$, il existe un unique réel strictement positif $u_\propto$ tel que $P(-u_\propto \leq X \leq u_\propto) = 1-\propto$.

Démonstration : (ROC au BAC)

En pratique, pour déterminer ce $u_\propto$ pour une valeur de $\propto$ donnée, on utilisera la méthode suivante:

On sait que : $P(-u_\propto \leq X \leq u_\propto) =$………….. donc d'après (3) on a :……………………………………………………………………

donc ……………………………………………………………………

donc ……………………………………………………………………

Et enfin, avec la calculatrice on en déduit que : $u_\propto =$……………………………………………………………………

Exercice : X suit la loi normale $N(0;1)$

Déterminer $u_{0,05}$ tel que $P\left(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}\right) = 0,95$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(0;1)$.

Alors : L'espérance de la variable X vaut ……… (c'est pour cela qu'on dit qu'elle est …………………………)

L'écart-type de la variable X vaut ……… (c'est pour cela qu'on dit qu'elle est …………………………)

II] Loi normale $N(\mu\,;\sigma^2)$

1) *Loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ*

Définition : Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu\,,\sigma^2)$ signifie que la variable

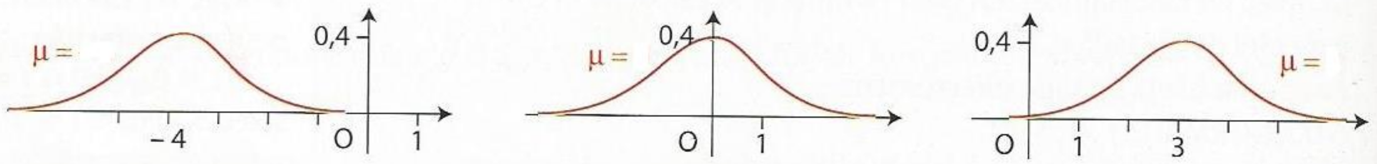
aléatoire $Z =$ suit la loi normale

Propriété : Si X suit la loi normale $N(\mu\,;\sigma^2)$ alors son espérance vaut et son écart-type vaut

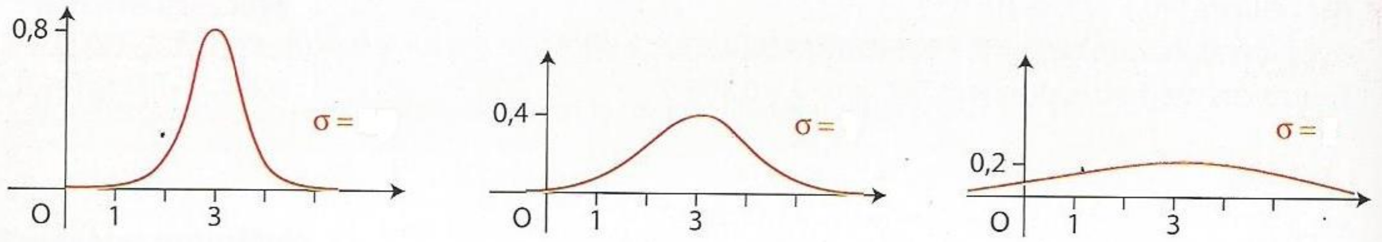
Remarque : La densité de la loi normale $N(\mu\,;\sigma^2)$ est encore une courbe « en cloche » mais cette fois elle est centrée au niveau de la valeur et son écartement varie suivant la valeur de

2) *Influences des paramètres μ et σ*

- Courbe représentative de la fonction de densité lorsque $\sigma = 1$: elle admet la droite d'équation $x = \mu$ pour axe de symétrie.



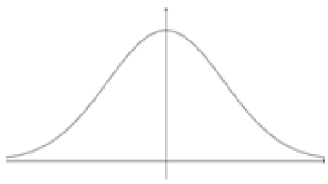
- Courbe représentative de la fonction densité lorsque $\mu = 3$: plus l'écart-type est grand, plus la cloche est élargie.



3) *Utilisation de la calculatrice*

a) Pour calculer une probabilité $p(a \leq X \leq b)$ lorsque l'on connaît a et b.

Schématiquement : On cherche à déterminer l'aire sous la courbe entre a et b.



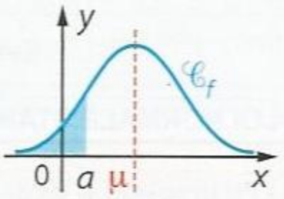
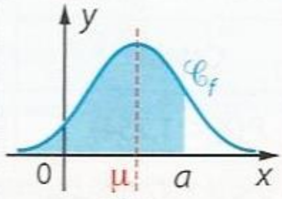
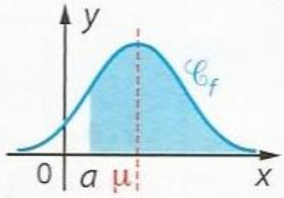
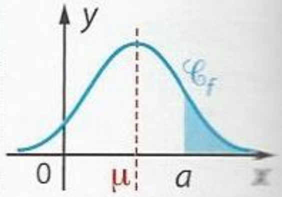
Instruction à la calculatrice : 2nd + var , 2 : normalFrép(, , ,)

Exemple : X suit la loi normale $N(15\,;4^2)$, on a :

- $p(10 < X \leq 20) =$……………………………………………………………………………≈…………………
- $p(16 < X \leq 19) =$……………………………………………………………………………≈…………………
- $p(12 \leq X < 14) =$……………………………………………………………………………≈…………………

Remarque : Du fait de la symétrie de la courbe de la densité , on a : $p(X \leq \mu) = p(X \geq \mu) =$........

Les calculatrices ne fournissant que des probabilités sous la forme $p(a \leq X \leq b)$, on utilisera la méthode décrite dans le tableau ci-dessous pour les calculs du type $p(X < a)$ ou $p(X > a)$.

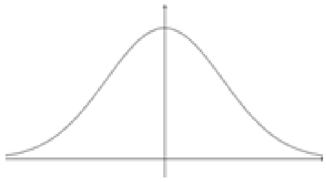
Probabilité	$P(X < a)$ pour $a < \mu$	$P(X < a)$ pour $a > \mu$	$P(X > a)$ pour $a < \mu$	$P(X > a)$ pour $a > \mu$
Graphique	 $a < \mu$	 $a > \mu$	 $a < \mu$	 $a > \mu$
Calcul				

Exemple : X suit la loi normale $N(2\,;0{,}1^2)$, on a :

- $p(X > 1{,}8) =$...
- $p(X \leq 2{,}1) =$...
- $p(X \geq 2{,}3) =$...
- $p(X < 1{,}9) =$...

b) Pour déterminer la valeur de a lorsque l'on connaît la probabilité p correspondant à $p(X \leq a)$

Schématiquement : On cherche à déterminer le seuil a pour que l'aire sous la courbe avant a soit égale à p



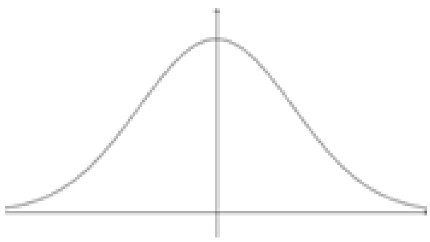
Instruction à la calculatrice : 2nd + var , 3 : FracNormale(,   ,   )

Exemple : X suit la loi normale $N(90\,;20^2)$.
Déterminer le réel a tel que : $P(X < a) = 0{,}98$

4) Intervalles « un, deux, trois sigma »

Propriété : Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu, \boldsymbol{\sigma}^2)$
Alors, on a :

- $P(\mu - \boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{X} \leq \mu + \boldsymbol{\sigma}) \approx$
- $P(\mu - 2\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{X} \leq \mu + \boldsymbol{2\sigma}) \approx$
- $P(\mu - 3\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{X} \leq \mu + \boldsymbol{3\sigma}) \approx$



Remarque : on peut utiliser directement ses résultats pour répondre à certaines questions ce qui simplifie parfois les calculs.

III] Savoir déterminer l'espérance d'une loi normale lorsqu'elle est inconnue au départ

Enoncé : Lors d'un test de connaissances, 70% des individus ont obtenu un score inférieur ou égale à 60 points. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus par un individu au test de connaissance.
On sait que X suit une loi normale d'écart-type 20.
Déterminer, au dixième près, l'espérance de X.

Solution :