TS spé Maths — Séance du Lundi 30 Mars

3) Exemples de la feuille n°3 du cours : les théorèmes fondamentaux

a) équation du type $ax = by$

Exemple : Déterminer x, et y entiers tels que $4x = 3y$

$4x = 3y$ donc $\boxed{4 \text{ divise } 3y}$

($3y = 4k$ avec k = entier)

or 4 et 3 sont premiers entre eux

($PGCD(4;3) = 1$)

donc d'après le th de Gauss $\boxed{4 \text{ divise } y}$ donc il existe un entier k tel que $\boxed{y = 4k}$

donc par substitution

comme $4x = 3y = 3 \times 4k$

on a $\cancel{4}x = 3 \times \cancel{4}k$

$\boxed{x = 3k}$

Réciproquement :

si $x = 3k$ et $y = 4k$ alors $4x - 3y = 4 \times 3k - 3 \times 4k = 0$

donc $\boxed{4x = 3y}$

Les solutions de l'équation $4x = 3y$ sont tous les couples entiers de la forme $(x;y) = (3k;4k)$ où k entier ($k \in \mathbb{Z}$)

b) Équation du type $ax + by = c$

1) $\boxed{5x - 3y = 1}$

a) existence de solutions : 5 et 3 sont premiers entre eux ($PGCD(5;3) = 1$) donc il existe d'après le théorème de Bézout 2 entiers u et v tels que $\boxed{3u + 5v = 1}$ c'est-à-dire tel que $\boxed{3u - 5(-v) = 1}$

donc l'équation $5x - 3y = 1$ admet au moins un couple $(u;-v)$ solution

b) Recherche d'une solution particulière (x_0, y_0)

on peut utiliser l'Algorithme d'Euclide ou trouver 2 entiers u et $-v$ à la calculatrice tel que $3u - 5(-v) = 1$

a	b	reste	division euclidienne de a par b	reste en fonction de a et b
5	3	$r_1 = 2$	$5 = 1 \times 3 + 2$ avec $0 \leq 2 < 3$ $a = 1 \times b + r_1$	$\boxed{r_1 = a - 1 \times b = a - b}$
3	2	$r_2 = 1$	$3 = 1 \times 2 + 1$ avec $0 \leq 1 < 2$ $b = 1 \times r_1 + r_2$	$r_2 = b - 1 \times r_1$ $= b - (a - b)$ $\boxed{r_2 = -a + 2b}$
2	1	$r_3 = 0$	$2 = 2 \times 1 + 0$ avec $0 \leq 0 < 1$	

Le dernier reste non nul est $r_2 = 1 = PGCD(5;3) = -a + 2b$

donc $-1 \times 5 + 2 \times 3 = 1$

$5 \times (-1) - 3 \times (-2) = 1$ avec $\boxed{x_0 = -1 \text{ et } y_0 = -2}$

$5 \times x_0 - 3y_0 = 1$

donc $\boxed{(x_0, y_0) = (-1;-2)}$ est une solution particulière de l'éq $\boxed{5x - 3y = 1}$

c) d'où le système $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 5x_0 - 3y_0 = 1 \end{cases}$ d'où $\boxed{5x - 3y = 5x_0 - 3y_0} = 1$

$5x - 5x_0 = 3y - 3y_0$

$\boxed{5(x - x_0) = 3(y - y_0)}$

donc 5 divise $3(y - y_0)$

or 5 et 3 sont premiers entre eux

donc d'après le th de Gauss. 5 divise $y - y_0$ donc il existe un entier k tel que $\boxed{y - y_0 = 5k}$

$y = y_0 + 5k$

$y = -2 + 5k$

par substitution : comme $5(x-x_0)=3(y-y_0)$ et que $\boxed{y-y_0=5k}$

on a $\cancel{5}(x-x_0)=3\times\boxed{5k}$

$x-x_0=3k$

$x=x_0+3k$

$\boxed{x=-1+3k}$

Réciproquement : si $x=-1+3k$ et $y=-2+5k$ on a $5x-3y=5(-1+3k)-3(-2+5k)$

$=-5+\cancel{15k}+6-\cancel{15k}$

$\boxed{5x-3y=1}$

donc les solutions de l'équation $5x-3y=1$ sont tous les couples $(x;y)$ de la forme $(-1+3k;-2+5k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ entier

Question supplémentaire :

Cherchons les solutions de l'équation $5x-3y=1$ de sorte que $0\le x\le 4$

(x,y) solution de l'équation $5x-3y=1$ donc $\boxed{x=-1+3k}$ et $y=-2+5k$

comme $0\le\boxed{x}\le 4$ on a $0\le -1+3k\le 4$ avec k entier.

$1\le 3k\le 4+1$

$\frac{1}{3}\le k\le\frac{5}{3}$ k est un entier compris entre $\frac{1}{3}\approx 0{,}33$ et $\frac{5}{3}\approx 1{,}66$

donc $\boxed{k=1}$

donc $x=-1+3k$ et $y=-2+5k$

$\boxed{x=-1+3\times1=2}$ et $\boxed{y=-2+5\times1=3}$

donc il existe une unique solution le couple $(2;3)$ solution de $5x-3y=1$ avec $0\le x\le 4$.