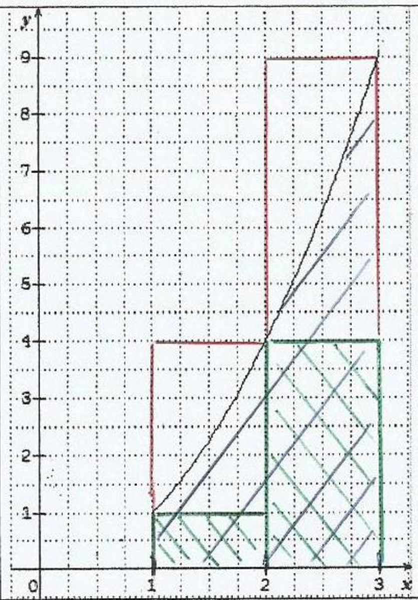
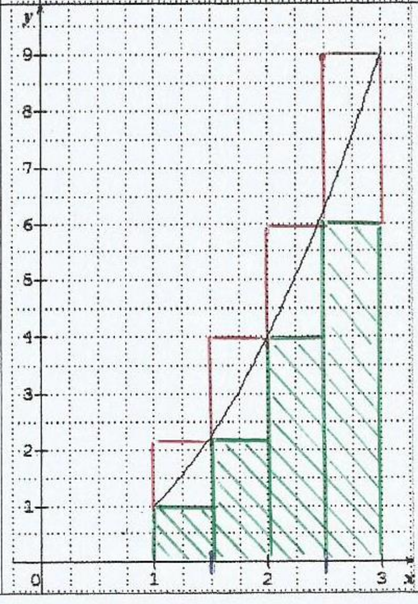
III] Encadrement de l'intégrale d'une fonction

1) Algorithme (Méthode des rectangles)

Méthode : Pour obtenir un encadrement de l'intégrale d'une fonction continue monotone et positive sur l'intervalle $[a;b]$ on va subdiviser l'intervalle $[a;b]$ en n intervalle de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$ afin de construire n « rectangles basés à gauche » et n « rectangles basés à droite ». La somme des aires de ses rectangles donnera un encadrement de l'intégrale.

Etape 1 : Nous cherchons à obtenir un encadrement de l'intégrale : $\int_1^3 x^2 dx$.

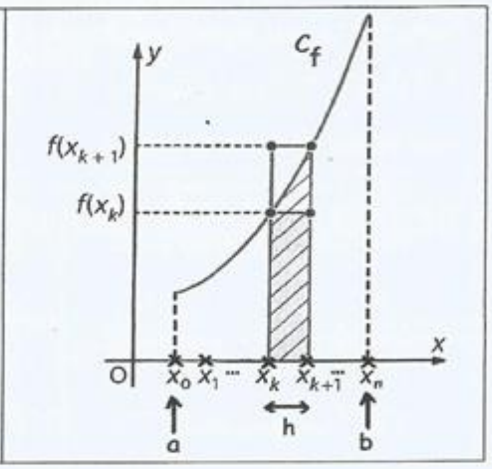
Pour cela, je vous propose d'effectuer les deux découpages suivants :

n	h	Dessin des rectangles pour l'encadrement	Encadrement de $\int_1^3 x^2 dx$
$n = 2$	$h = \frac{3-1}{2}$ $= \frac{2}{2}$ $= 1$		Somme des 2 rectangles basés à gauche : $1\times1 + 1\times4 = 5$ u.a Somme des 2 rectangles basés à droite : $1\times4 + 1\times9 = 13$ u.a on en déduit que : $5 \leq \int_1^3 x^2 dx \leq 13$
$n = 4$	$h = \frac{3-1}{4}$ $= \frac{2}{4}$ $= \frac{1}{2}$ $= 0,5$		Somme des 4 rectangles basés à gauche : $0,5\times1 + 0,5\times1,5^2 + 0,5\times4 + 0,5\times2,5^2$ $= 6,75$ u.a Somme des 4 rectangles basés à droite : $0,5\times1,5^2 + 0,5\times4 + 0,5\times2,5^2 + 0,5\times9$ $= 10,75$ u.a on en déduit que : $6,75 \leq \int_1^3 x^2 dx \leq 10,75$

Remarques : Plus on va augmenter le nombre de subdivisions, plus l'encadrement deviendra précis. Le problème est que cela implique de plus en plus de calculs. Il serait donc intéressant de programmer un algorithme.

Etape 2 : Généralisation

- Si on appelle x_0, x_1, x_2 , ... , x_n les points de la subdivision de l'intervalle $[a;b]$.
  On a alors : $x_0 =$ a , $x_n =$ b.
  et $x_{k+1} =$ $x_k + h$
- Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ on a :
  - L'aire du rectangle basé à gauche qui est égale à : $h \times f(x_k)$
  - L'aire du rectangle basé à droite qui est égale à : $h \times f(x_{k+1})$



Etape 3 : L'Algorithme des rectangles

Language naturel	Algorithme	Programme
On entre les bornes a et b et n le nombre de sous intervalles souhaités.	on note f la fonction avec laquelle on utilisera l'algorithme Saisir *a*, *b*, *n*	Prompt *A* Prompt *B* Prompt *N*
On calcule l'amplitude h des sous intervalles.	*h* prend la valeur $\frac{b-a}{n}$	$(B-A)/N \rightarrow H$
On initialise les variables : x représente la position sur l'axe des abscisses, u contiendra la somme des rectangles basés à gauche et v la somme des rectangles basés à droites.	*x* prend la valeur *a* *u* prend la valeur 0 *v* prend la valeur 0	$A \rightarrow X$ $0 \rightarrow U$ $\boxed{X,T,\theta,n}$ ⚠ $0 \rightarrow V$
On numérote par k les sous intervalles de 0 à $n-1$.	**Pour** *k* variant de 0 à *n* − 1 *u* prend la valeur $u + h \times f(x)$ *x* prend la valeur $x + h$ *v* prend la valeur $v + h \times f(x)$ **Fin Pour**	For(K,0,N−1) $U + H * Y_1 \rightarrow U$ $X + H \rightarrow X$ $V + H * Y_1 \rightarrow V$ End
Quand on arrive sur l'intervalle numéro k, alors x correspond au début de l'intervalle, on peut donc calculer l'aire du rectangle basé à gauche et l'ajouter à l'aire précédente. Puis on fait évoluer x pour se placer à la fin de l'intervalle numéro k afin de calculer l'aire du rectangle basé à droite et l'ajouter à l'aire précédente.	Afficher *u*, *v* Remarque : Pour la programmation l'expression de la fonction $f(x)$ sera entrée dans Y_1. Pour rappel, "Y_1" s'obtient en faisant : $\boxed{\text{Var}}$ → Y-VARS → Fonction → Y_1	Disp *u* Disp *v*

Etape 4 : Exécution de l'algorithme des rectangles

Faire tourner cet algorithme dans le tableau ci-dessous pour la fonction $f(x) = x^2$ avec $n = 4$, $a = 1$ et $b = 3$.

Dans ce cas, h est donc égale à : $\frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Variables	Initialisation	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
u	0	$0+0{,}5\times 1$ $= 0{,}5$	$0{,}5+0{,}5\times 1{,}5^2$ $= 1{,}625$	$1{,}625+0{,}5\times 2^2$ $= 3{,}625$	$3{,}625+0{,}5\times 2{,}5^2$ $= 6{,}75$
x	1	$1+0{,}5$ $= 1{,}5$	$1{,}5+0{,}5$ $= 2$	$2+0{,}5$ $= 2{,}5$	$2{,}5+0{,}5$ $= 3$
v	0	$0+0{,}5\times 1{,}5^2$ $= 1{,}125$	$1{,}125+0{,}5\times 2^2$ $= 3{,}125$	$3{,}125+0{,}5\times 2{,}5^2$ $= 6{,}25$	$6{,}25+0{,}5\times 3^2$ $= 10{,}75$

L'algorithme affichera donc $u = 6{,}75$ et $v = 10{,}75$ (Comme à l'étape ①)

Etape 5 : Influence de n

Avec $n = 10$, on obtient : $7{,}88 \leq \int_1^3 x^2 dx \leq 9{,}48$

Avec $n = 100$, on obtient : $8{,}5868 \leq \int_1^3 x^2 dx \leq 8{,}7468$

Avec $n = 1000$, on obtient : $8{,}658668 \leq \int_1^3 x^2 dx \leq 8{,}674668$

⚠ à bien entrer la formule de la fonction dans Y_1 avant de lancer le programme.
Ici, $f(x) = x^2$.

Etape 6 : Vérification

$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{1^3}{3}\right) = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

$\simeq 8{,}666...$

Remarque : Cet algorithme sera utile pour calculer des intégrales dont on ne connait pas de primitive.