Exercice BAC : Géométrie dans l'espace

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; −1 ; 3).

  a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

  b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

  c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

  d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

  a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

  b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

  c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; −1 ; 3).
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{-1} \neq \frac{-3}{-1}$

donc A, B et C ne sont pas alignés

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; −1 ; 3).
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

2) a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ dirige la droite Δ

or, $\vec{u}\cdot\vec{AB} = 2\times1+(-1)\times(-1)+3\times(-1) = 0$
donc $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux
$\vec{u}\cdot\vec{AC} = 2\times2+(-1)\times(-5)+3\times(-3) = 0$
donc $\vec{u}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux
de plus, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC)
Ainsi : Δ est orthogonale à (ABC)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; −1 ; 3).
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

(b) • Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est normal à (ABC)

on a une équation cartésienne de la forme : $2x - y + 3z + d = 0$

• De plus, $A\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ appartient au plan (ABC), on a donc :

$$2\times 0 - 4 + 3\times 1 + d = 0$$
$$-1 + d = 0$$
$$d = 1$$

Ainsi : (ABC) : $2x - y + 3z + 1 = 0$

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; −1 ; 3).
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

c) Δ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et passe par le point $D\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}$.

On a donc la représentation paramétrique suivante pour Δ : $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; −1 ; 3).
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

d) $H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Delta \cap (ABC)$

ssi $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$

donc $2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0$

$14 + 4t + 1 + t + 12 + 9t + 1 = 0$

$14t + 28 = 0$

$t = \dfrac{-28}{14}$

$t = -2$.

d'où $\begin{cases} x = 7 + 2\times(-2) = 3 \\ y = -1 - (-2) = 1 \\ z = 4 + 3\times(-2) = -2 \end{cases}$. Ainsi $H\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

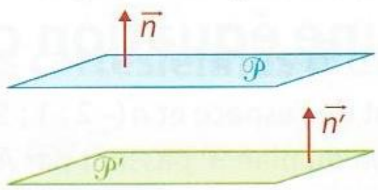
c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Propriétés Soit deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

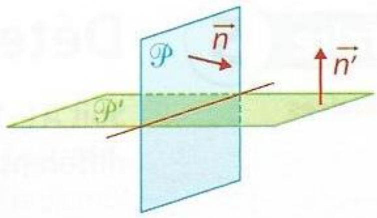
(1) Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

(2) Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants : leur intersection est une droite.

Les plans sont parallèles



Les plans sont sécants



3) a) $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à P_1

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ est normal à P_2

or, $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires

(car $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{1} \neq \frac{0}{1}$)

donc P_1 et P_2 sont sécants.

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4t-2 \\ y &=& t \\ z &=& 3t+2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

(b) $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$

Ssi $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+4y+2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (-4y-2)+y+z=0 \\ x=-4y-2 \end{cases}$ $\begin{cases} z=3y+2 \\ x=-4y-2 \end{cases}$

Avec $y=t$, on a : $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=t \\ z=2+3t. \end{cases}$

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

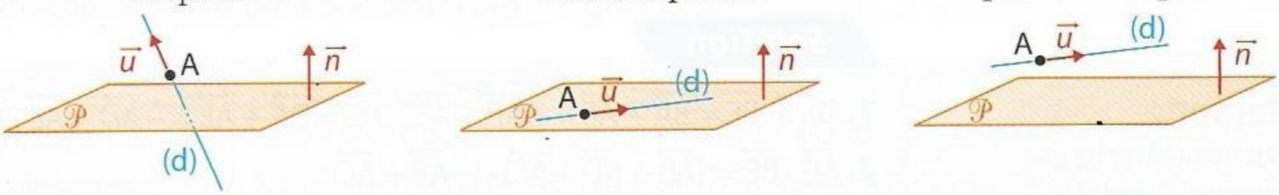
Propriétés Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

(1) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

(2) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :

- si A appartient à $\mathcal{P}$, la droite (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$;
- si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, la droite (d) est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

La droite est sécante au plan — La droite est incluse dans le plan — La droite est strictement parallèle au plan



3)ⓒ $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$ dirige d

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est normal à (ABC)

Or, $\vec{n}\cdot\vec{v} = 2\times(-4)+(-1)\times 1+3\times 3 = 0$

donc $\vec{n}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Ainsi : d et (ABC) sont parallèles