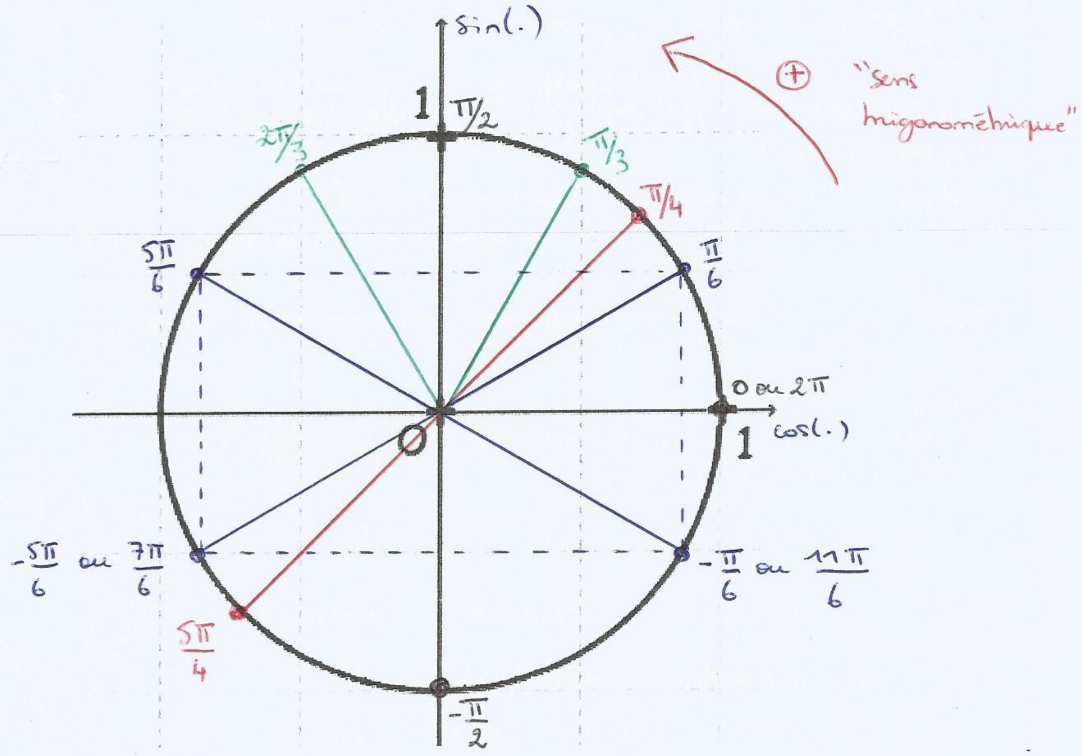
CH-12- Les nombres complexes (Partie II)

I] Notion de module et d'argument

1) Rappels sur le cercle trigonométrique



Les valeurs à connaître (celle du 1er quadrant) :

$\begin{cases} \cos(0) = 1 \\ \sin(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Les autres valeurs sont à savoir retrouver à partir des précédentes (celles des 3 autres quadrants) :

$\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$

Remarque : Le tout pouvant être vérifié à la calculatrice (Attention à bien la mettre en mode : RADIAN)

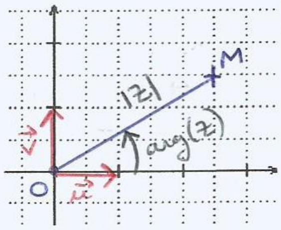
2) Module et argument d'un nombre complexe

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M le point d'affixe z.

- Le **module** de z, noté $|z|$ correspond à la distance OM.

On a donc : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Un **argument** de $z \neq 0$, noté $\arg(z)$ est **une** mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

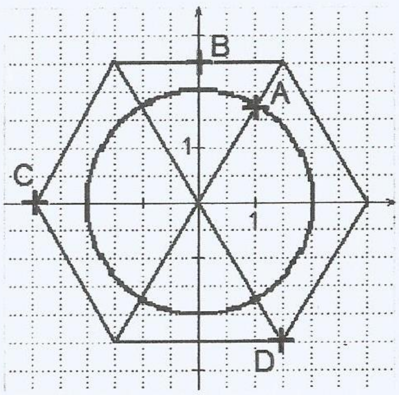


Remarque : Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$, alors $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi une mesure de cet angle orienté.

Exemple : Si $\theta = \frac{\pi}{4}$,alors on peut aussi donner comme mesure de cet angle : $\frac{9\pi}{4}$ ou $-\frac{7\pi}{4}$

Exercice :

1) Déterminer le module et un argument de l'affixe des points A, B, C et D du repère ci-contre.



$|z_A| = 2$ $\quad |z_B| = 2{,}5$ $\quad |z_C| = 3$ $\quad |z_D| = 3$

$\arg(z_A) = \frac{\pi}{3}$ $\quad \arg(z_B) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \arg(z_C) = \pi$ $\quad \arg(z_D) = -\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$

2) Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$z_E = -2 + 4i \text{ ; } z_F = 3 \text{ et } z_G = -2i.$$

$|z_E| = |-2+4i|$
$= \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$
$= \sqrt{4+16}$
$= \sqrt{20}$
$= 2\sqrt{5}$

$|z_F| = |3|$
$= \sqrt{3^2 + 0^2}$
$= \sqrt{9}$
$= 3$

$|z_G| = |-2i|$
$= \sqrt{0^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{4}$
$= 2$

Propriétés :

(1) $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

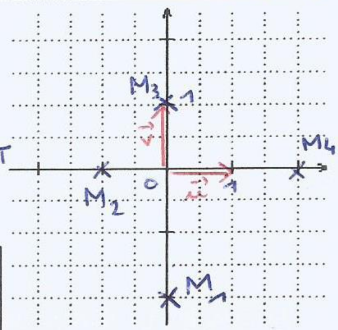
(2) Tout nombre réel strictement positif a un argument égale à 0 ou 2π

(3) Tout nombre réel strictement négatif a un argument égale à π ou $-\pi$

(4) Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive a un argument égale à $\frac{\pi}{2}$

(5) Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative a un argument égale à $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

Exercice : Donner une valeur des arguments suivants :



$z_{M_1} = -2i$ $\quad z_{M_2} = -1$ $\quad z_{M_3} = i$ $\quad z_{M_4} = 2$

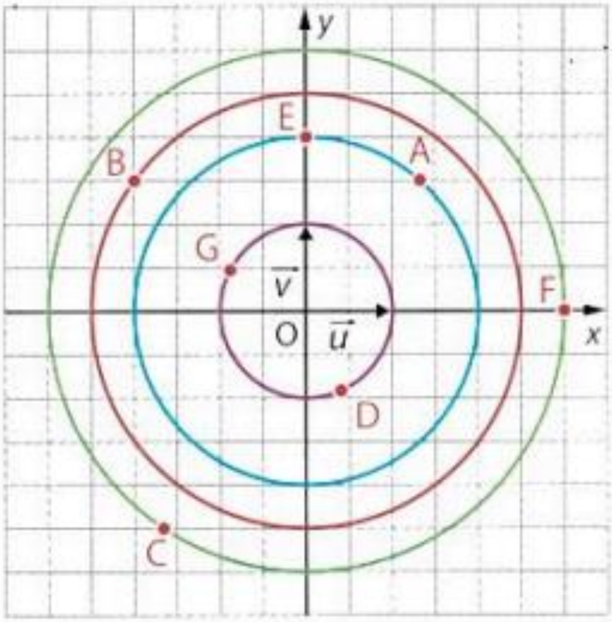
$\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \arg(-1) = \pi$ ou $-\pi$ $\quad \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \arg(2) = 0$ ou 2π

Propriété : Pour tous les points A et B du plan complexe d'affixes z_A et z_B,

Alors on a : $AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$

Exercice 16 p 211

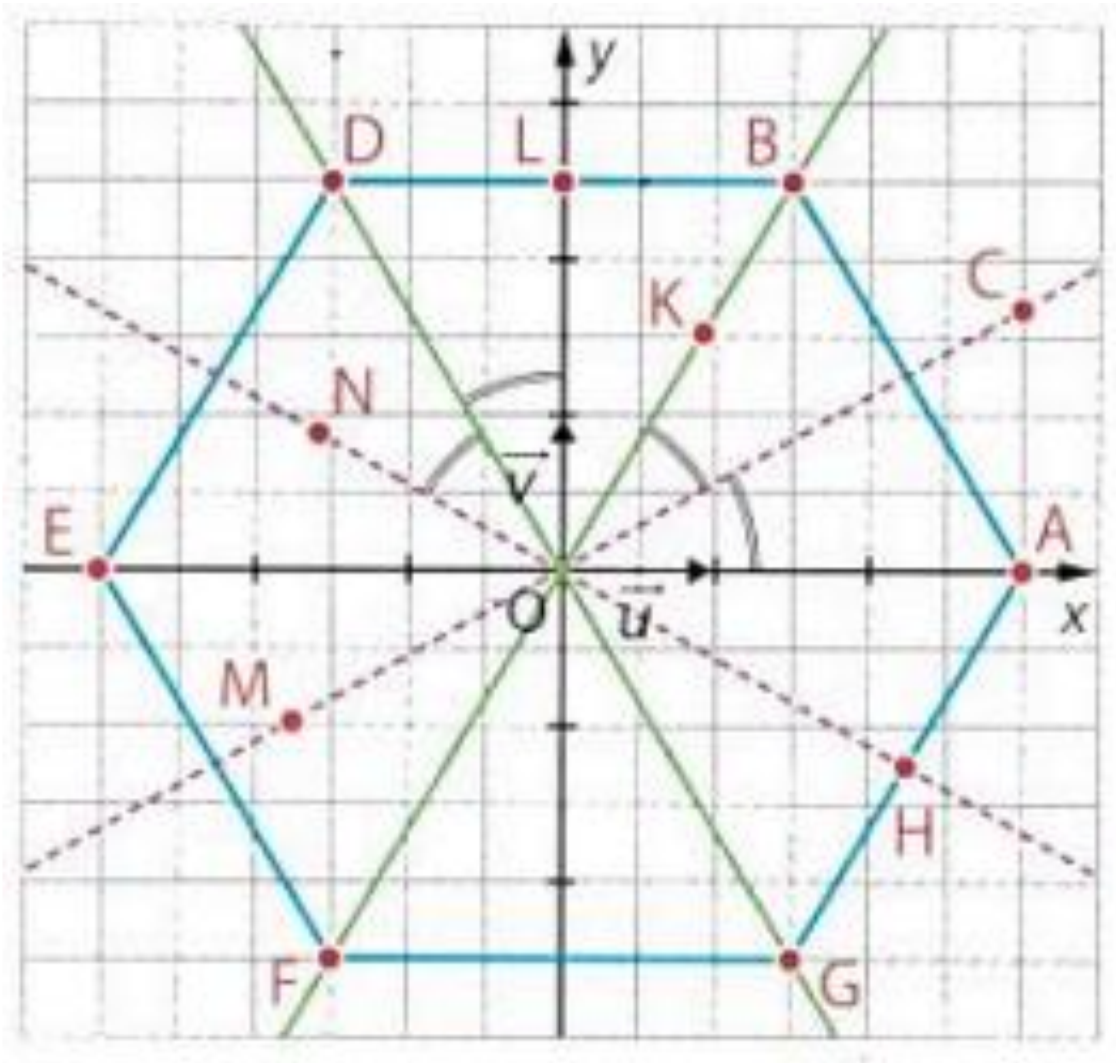
16 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.



Lire graphiquement le module de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E, F et G.

$\lvert z_A \rvert =$	$\lvert z_B \rvert =$	$\lvert z_C \rvert =$	$\lvert z_D \rvert =$
$\lvert z_E \rvert =$	$\lvert z_F \rvert =$	$\lvert z_G \rvert =$	

Exercice 23 p 211

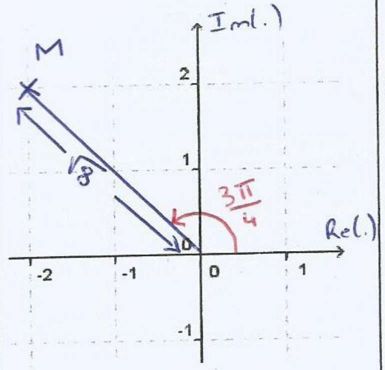
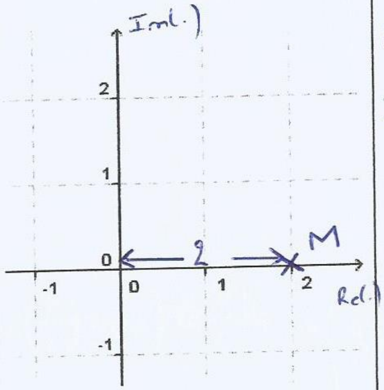
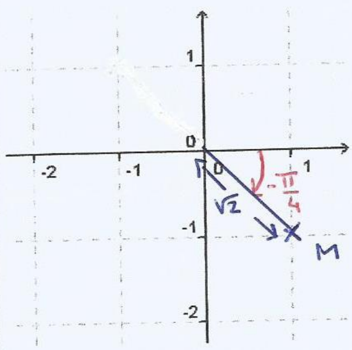


$\arg(z_A) =$	$\arg(z_B) =$	$\arg(z_C) =$	$\arg(z_D) =$
$\arg(z_E) =$	$\arg(z_F) =$	$\arg(z_G) =$	$\arg(z_H) =$
$\arg(z_K) =$	$\arg(z_L) =$	$\arg(z_M) =$	$\arg(z_N) =$

II] Les différentes forme d'écriture d'un nombre complexe

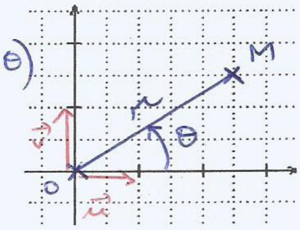
1) La forme trigonométrique

a) Activité

Module et argument du nombre complexe z : $\lvert z\rvert = r$ $\arg(z) = \theta$	Placer le point M d'affixe : z	Lire graphiquement : $Re(z)$ et $Im(z)$.	Calculer a et b tels que: $a = r \times \cos(\theta)$ $b = r \times \sin(\theta)$
$\lvert z\rvert = \sqrt{8}$ $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$		$Re(z) = -2$ $Im(z) = 2$	$a = \sqrt{8} \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $= \sqrt{8} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= -2$ $b = \sqrt{8} \times \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $= \sqrt{8} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ $= 2$
$\lvert z\rvert = 2$ $\arg(z) = 0$		$Re(z) = 2$ $Im(z) = 0$	$a = 2 \times \cos(0)$ $= 2 \times 1$ $= 2$ $b = 2 \times \sin(0)$ $= 2 \times 0$ $= 0$
$\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$		$Re(z) = 1$ $Im(z) = -1$	$a = \sqrt{2} \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ $= 1$ $b = \sqrt{2} \times \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $= \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= -1$

b) Définition

Définition : (Forme Trigonométrique : F.T)



Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme : $z = r\times(\cos\theta + i\sin\theta)$
avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

Cette écriture est appelé forme TRIGONOMÉTRIQUE de z.

Remarque : A partir de la forme trigonométrique, nous pouvons facilement revenir à la forme algébrique.

En effet, $z = r\times(\cos\theta + i\sin\theta) = \underbrace{r\cos\theta}_{Re(z)} + i\,\underbrace{r\sin\theta}_{Im(z)}$

c) Passage de la forme trigonométrique (F.T) à la forme algébrique (F.A)

Exercice : Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : (il suffit de développer)

$z_1 = 3\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (F.T) $= 3\times\left(\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $= \frac{3\sqrt2}{2} + \frac{3\sqrt2}{2}i$ (F.A)	$z_2 = 2\times(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi))$ (F.T) $= 2\times(-1 + i\times 0)$ $= -2$ (F.A)
$z_3 = \sqrt3\times\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $= \sqrt3\times\left(-\frac{\sqrt3}{2} + i\times\frac{1}{2}\right)$ $= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ (F.A)	$z_4 = \frac{1}{2}\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $= \frac{1}{2}\times(0 + i\times 1)$ $= \frac{1}{2}i$ (F.A)

Pour les exercices 118 et 119, on donne le module et un argument de cinq complexes.
Écrire chacun de ces complexes sous forme algébrique.

119

$\|z\|$	4	$\sqrt{6}$	2	$\frac{2}{5}$	$\sqrt{2}$
arg z	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$