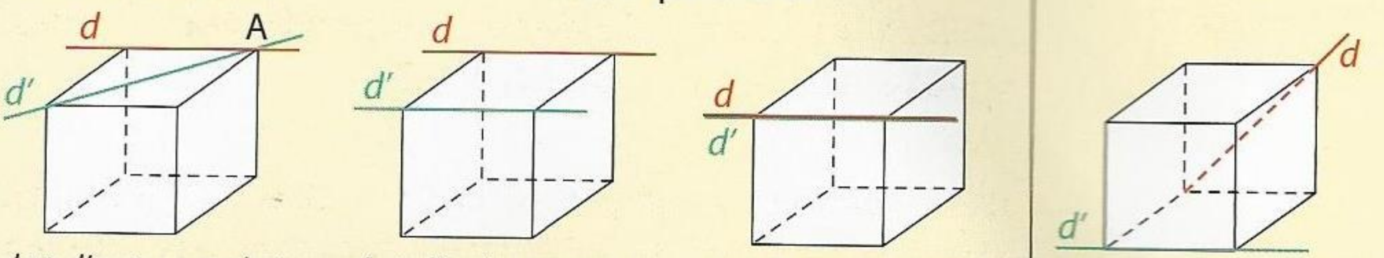
IV] Positions relatives de droites et plan

1) *Positions relative de deux droites*

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

Coplanaires (dans un même plan) | **Non coplanaires**

d et *d'* sécantes | *d* et *d'* parallèles



d et *d'* ont un point d'intersection A.

d et *d'* strictement parallèles (pas de point d'intersection).

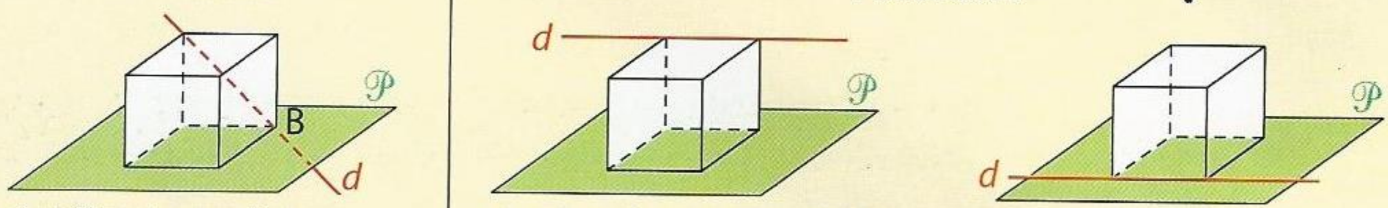
d et *d'* confondues.

Aucun plan ne contient *d* et *d'* (pas de point d'intersection).

2) *Positions relatives d'une droite et d'un plan*

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Sécants | **Parallèles**



d et 𝒫 ont un point d'intersection B.

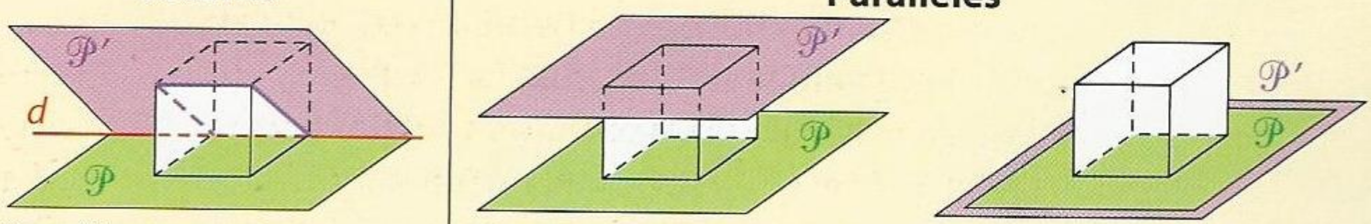
d et 𝒫 strictement parallèles (pas de point d'intersection).

d est contenue dans 𝒫.

3) *Positions relative de deux plans*

Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Sécants | **Parallèles**



𝒫 et 𝒫' ont une droite d'intersection *d*.

𝒫 et 𝒫' strictement parallèles (pas de point d'intersection).

𝒫 et 𝒫' confondus.

Exercice 118 p 251

118 Soit (d) et (d′) les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 - 6t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites (d) et (d′) sont sécantes en un point Ω dont on donnera les coordonnées.

Exercice 119 p 251

119 Soit (d) et (d′) les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = -1 + k \\ z = 2 - k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

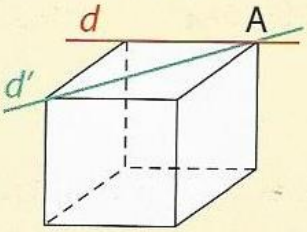
Démontrer que ces droites ne sont pas coplanaires.

Rappel :

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

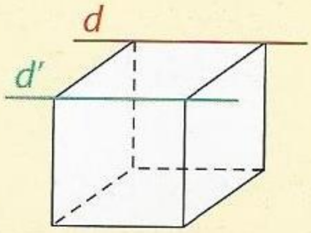
Coplanaires (dans un même plan)

d et *d′* sécantes

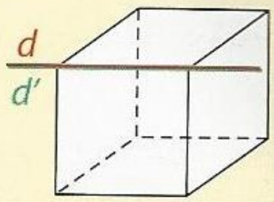


d et *d′* ont un point d'intersection A.

d et *d′* parallèles

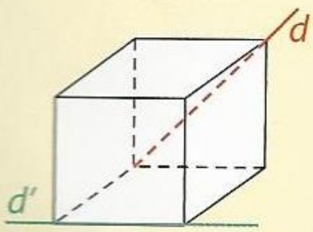


d et *d′* strictement parallèles (pas de point d'intersection).



d et *d′* confondues.

Non coplanaires



Aucun plan ne contient *d* et *d′* (pas de point d'intersection).

Exercice 122 p 252

122 Soit $\mathscr{P}$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t' \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}. \\ z = t+t' \end{cases}$$

Soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1+2k \\ y = -5+k \text{ avec } k \in \mathbb{R}. \\ z = -5+3k \end{cases}$$

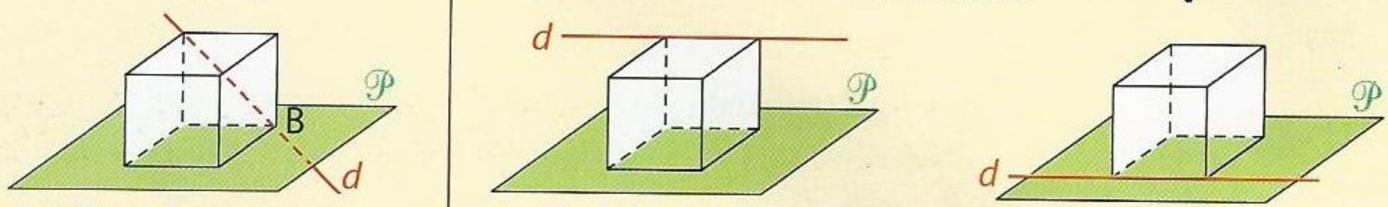
1. Le point A de paramètre 0 de (d) appartient-il à $\mathscr{P}$?

2. Démontrer que (d) et $\mathscr{P}$ sont sécants.

Rappel :

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Sécants | **Parallèles**



d et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersection B.

d et $\mathscr{P}$ strictement parallèles (pas de point d'intersection).

d est contenue dans $\mathscr{P}$.

exercice 118 p251

(d) et (d') sont sécantes

ssi il existe $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 1+4t = 15+k \\ 2+4t = 8-k \\ 1-6t = -6+2k \end{cases}$

Or, $\begin{cases} 1+4t = 15+k \\ 2+4t = 8-k \\ 1-6t = -6+2k \end{cases}$

$\iff \begin{cases} k = 4t-14 \\ 2+4t = 8-(4t-14) \\ 1-6t = -6+2k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 4t-14 \\ t = 2,5 \\ 1-6t = -6+2k \end{cases}$

$\iff \begin{cases} k = -4 \\ t = 2,5 \\ -14 = -14 \end{cases}$ (équation compatible avec les deux autres).

donc (d) et (d') sont sécantes en un point Ω de coordonnées :

$\begin{cases} x_\Omega = 1+4\times 2,5 = 11 \\ y_\Omega = 2+4\times 2,5 = 12 \\ z_\Omega = 1-6\times 2,5 = -14 \end{cases}$ $\left(\text{ou } \begin{array}{l} x_\Omega = 15-4 \\ y_\Omega = 8-(-4) \\ z_\Omega = -6+2\times(-4) \end{array} \right.$

Ainsi : $\Omega \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ -14 \end{pmatrix}$

exercice 119 p 251

(d) et (d') ne sont pas coplanaires

ssi (d) et (d') ne sont pas parallèles et ne sont pas sécantes.

• Montrons que : $(d) \nparallel (d')$

(d) est dirigé par $\vec{u}(4;1;-1)$

(d') est dirigé par $\vec{v}(2;1;3)$

or, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Donc (d) et (d') ne sont pas parallèles

• Montrons que : (d) et (d') ne sont pas sécantes.

(d) et (d') sont sécantes

ssi il existe $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 1+4k = 2t \\ -1+k = 3+t \\ 2-k = -2+3t \end{cases}$

Or, $\begin{cases} 1+4(4+t) = 2t \\ k = 4+t \\ 2-k = -2+3t \end{cases}$ $\begin{cases} t = -8,5 \\ k = -4,5 \\ 6,5 = -27,5 \end{cases}$ IMPOSSIBLE

donc (d) et (d') ne sont pas sécantes

Ainsi : (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

exercice 122 p 252. (123 p252 du m̂ type)

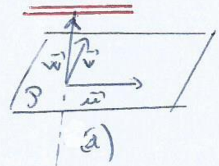
1) A est le point de paramètre 0 de (d)

donc $\begin{cases} x_A = 1+2\times 0 = 1 \\ y_A = -5+0 = -5 \\ z_A = -5+3\times 0 = -5 \end{cases}$ donc $A\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

puis, $A \in \mathcal{P}$ ssi il existe t et t' réels tels que $\begin{cases} x_A = 3+t \\ y_A = -1+2t' \\ z_A = t+t' \end{cases}$

or, $\begin{cases} 1 = 3+t \\ -5 = -1+2t' \\ -5 = t+t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ t' = -2 \\ -5 = -4 \end{cases}$ IMPOSSIBLE

donc $A \notin \mathcal{P}$

2) 

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent $\mathcal{P}$

$\vec{w}$ dirige (d).

(d) et $\mathcal{P}$ sont sécants

ssi $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires

Soit a, b, c réels tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w} = \vec{0}$

$\begin{cases} a+2c = 0 \\ 2b+c = 0 \\ a+b+3c = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ donc non coplanaires d'où $(d) \times \mathcal{P}$

puis si on demande coord. du point d'intersect°.

Soit $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \cap (d)$

on a : $\begin{cases} x_M = 3+t \\ y_M = -1+2t' \\ z_M = t+t' \end{cases}$ et $\begin{cases} x_M = 1+2k \\ y_M = -5+k \\ z_M = -5+3k \end{cases}$

donc $\begin{cases} 3+t = 1+2k \\ -1+2t' = -5+k \\ t+t' = -5+3k \end{cases}$

d'où $\begin{cases} t = -2+2k \\ k = 4+2t' \\ -2+2(4+2t') = -5+3(4+2t') \end{cases}$

$\begin{cases} t = -2+2k \\ k = 4+2t' \\ t' = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 2 \\ k = 2 \\ t' = -1 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_M = 5 \\ y_M = -3 \\ z_M = 1 \end{cases}$ et $M\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

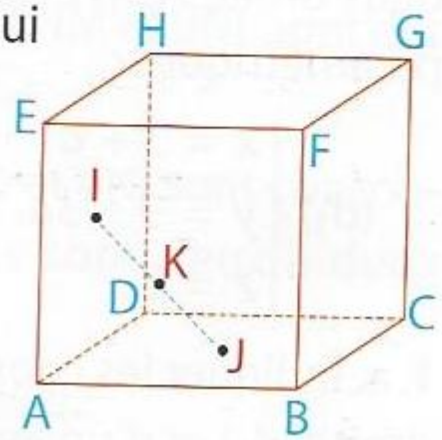
Sujet C p 259 (Questions 1) et 2) uniquement)

Sujet C

question 1) et 2)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ]. L'espace est rapporté au repère orthonormé : $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.

2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.

Sujet D p 259

Sujet D

Capacités mises en œuvre

➡ *Déterminer et utiliser une représentation paramétrique d'une droite*

➡ *Étudier des positions relatives*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit Δ la droite passant par $A(1 ; -2 ; -1)$ et $B(3 ; -5 ; -2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.

2. On note Δ' la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Montrer que les droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.

3. Soit les points $C(-1 ; -4 ; 1)$, $D(1 ; 3 ; -2)$ et $E(-2 ; 5 ; 0)$.
a. Démontrer que C, D et E définissent un plan $\mathcal{P}$.
b. Montrer que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont coplanaires.
c. Que peut-on en déduire pour la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$?