EXERCICE TYPE BAC 1 sur les nombres complexes (CLASSIQUE)

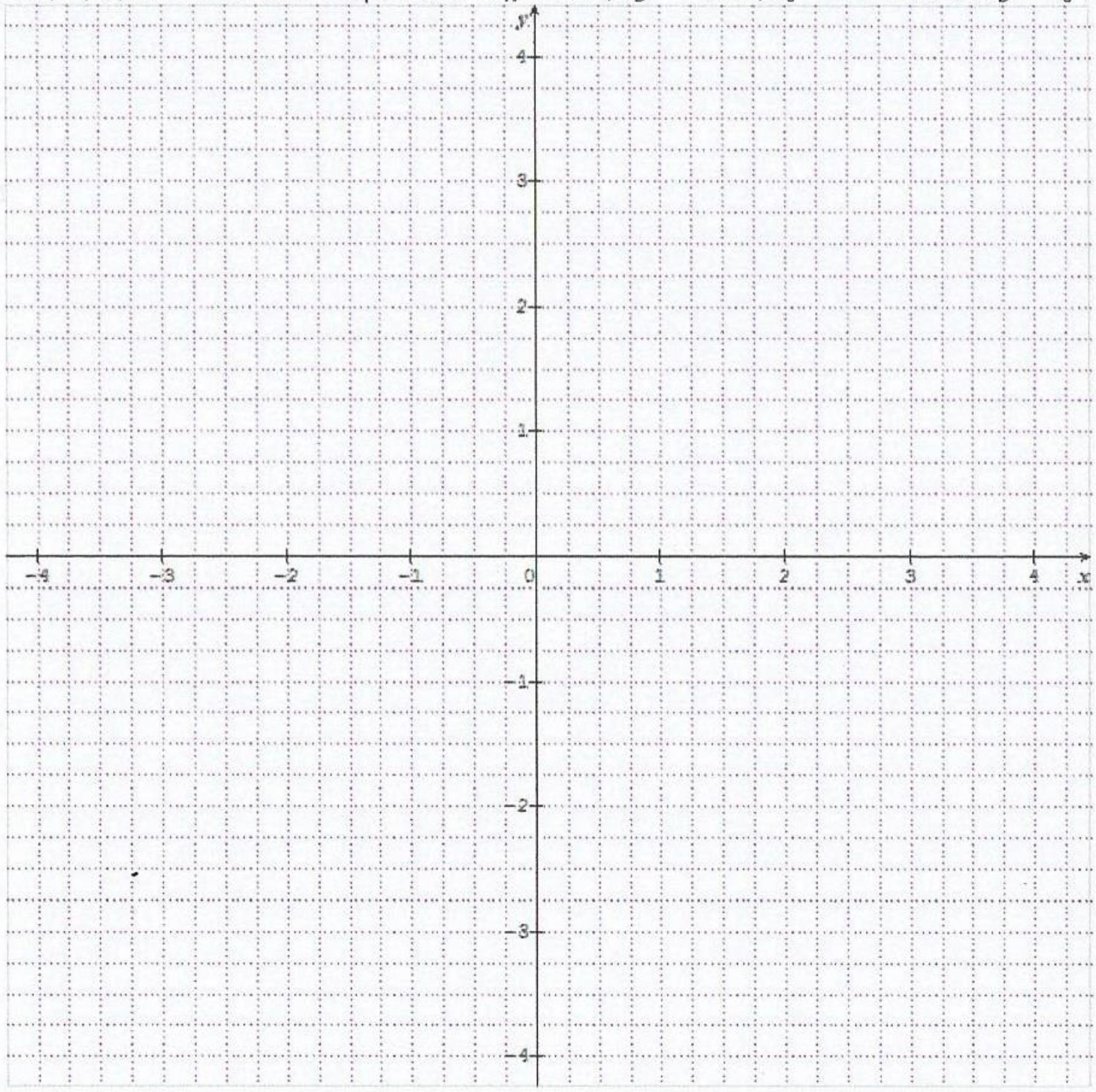
On considère le polynôme P définie par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1) Vérifier que $z_1 = i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) Vérifier que : $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

4) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormée $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ci-dessous, les points A, B, C, et D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$.



5) Montrer que ces 4 points appartiennent a un même cercle de centre $I(3; 0)$ dont on précisera le rayon.

6) On note E le symétrique de D par rapport à O.

a) Déterminer l'affixe z_E du point E. (on donnera la forme algébrique)

b) Déterminer la forme algébrique du quotient $Z = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ puis déterminer sa forme trigonométrique.

c) Interpréter géométriquement le module et l'argument de Z.

d) En déduire la nature du triangle BEC.

Correction de l'exercice type bac 1 sur les nombres complexes (CLASSIQUE)

1) $P(z_1) = (i\sqrt{3})^4 - 6\times(i\sqrt{3})^3 + 24\times(i\sqrt{3})^2 - 18\times(i\sqrt{3}) + 63$

$= 9 - 6\times(-i)\times 3\sqrt{3} + 24\times(-3) - 18i\sqrt{3} + 63$

$= 9 + \cancel{18i\sqrt{3}} - 72 - \cancel{18i\sqrt{3}} + 63$

$= \underline{0}$ donc z_1 est une solution de l'équation $P(z)=0$.

2) $(z^2+3)(z^2-6z+21)$

$= z^4 - 6z^3 + 21z^2 + 3z^2 - 18z + 63$

$= z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = \underline{P(z)}$

3) $P(z) = 0$

$z^2+3 = 0$ ou $z^2 - 6z + 21 = 0$

$z^2 = -3$

$z_1 = i\sqrt{3}$ ou $z_2 = -i\sqrt{3}$

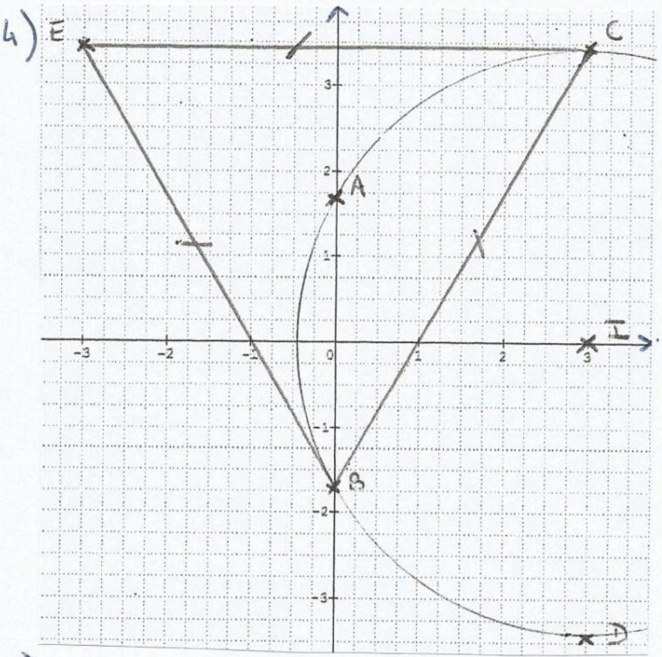
$\Delta = -48 < 0$ donc il y a 2 solutions complexes conjuguées

$z_3 = \dfrac{+6 - i\sqrt{48}}{2} = 3 - 2i\sqrt{3}$

et $z_4 = \overline{z_3} = 3 + 2i\sqrt{3}$

Ainsi : $S_{\mathbb{C}} = \{i\sqrt{3}\,;\, -i\sqrt{3}\,;\, 3-2i\sqrt{3}\,;\, 3+2i\sqrt{3}\}$

4)



5) A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre I

ssi $IA = IB = IC = ID$

ssi $|z_A - z_I| = |z_B - z_I| = |z_C - z_I| = |z_D - z_I|$

or, $|z_A - z_I| = |i\sqrt{3} - 3| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

de même $|z_B - z_I| = |z_C - z_I| = |z_D - z_I| = 2\sqrt{3}$

d'où A, B, C et D appartiennent au cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{3}$

6) ⓐ E est le symétrique de D par rapport à O

donc $\vec{OE} = \vec{DO}$

d'où $z_{\vec{OE}} = z_{\vec{DO}}$ et $z_E - z_O = z_O - z_D$

$z_E = -z_D$

Ainsi : $z_E = -(3 - 2i\sqrt{3}) = -3 + 2i\sqrt{3}$

ⓑ $z = \dfrac{3 + 2i\sqrt{3} - (-i\sqrt{3})}{-3 + 2i\sqrt{3} - (-i\sqrt{3})} = \dfrac{(3+3i\sqrt{3})\times(-3-3i\sqrt{3})}{(-3+3i\sqrt{3})\times(-3-3i\sqrt{3})}$

"technique du conjugué"

$= \dfrac{18 - 18i\sqrt{3}}{36}$

$= \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (forme algébrique)

puis $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

et avec $\theta = \arg(z)$, on a :

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1/2}{1} = \boxed{\dfrac{1}{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}/2}{1} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$ d'où $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$

Ainsi : $z = 1\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (forme trigonométrique)

ⓒ Interprétation géométrique :

du MODULE	de l'ARGUMENT
$\lvert z\rvert = 1$	$\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}$
$\left\lvert\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right\rvert = 1$	$\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$
$\dfrac{\lvert z_C - z_B\rvert}{\lvert z_E - z_B\rvert} = 1$	$(\vec{BE}\,;\,\vec{BC}) = -\dfrac{\pi}{3}$
$\lvert z_C - z_B\rvert = \lvert z_E - z_B\rvert$	
$BC = BE$	

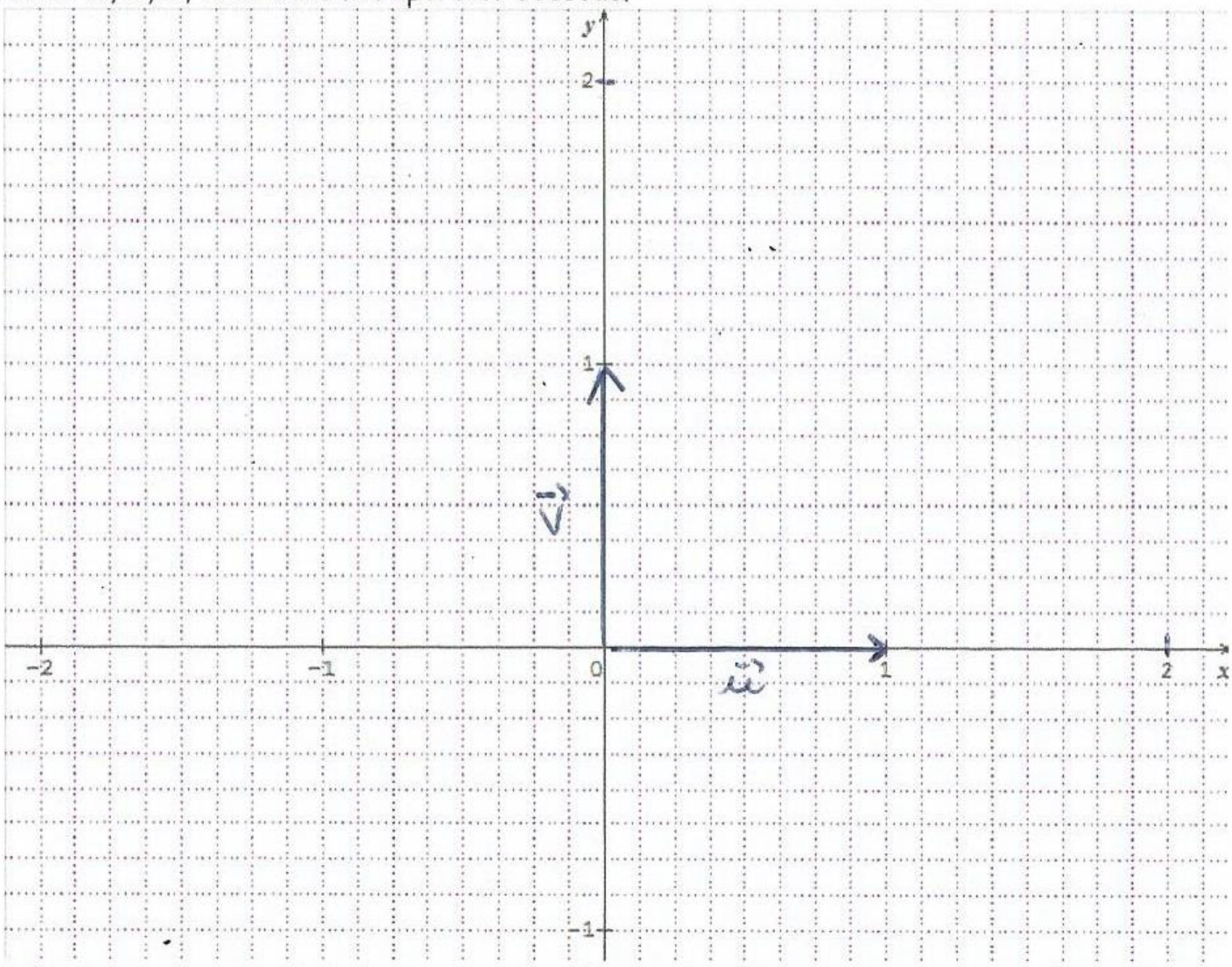
ⓓ D'après la question précédente le triangle BEC est équilatéral

EXERCICE TYPE BAC 2 sur les nombres complexes (avec une application f(z))

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique 4cm). On note A, B, C, et D les points d'affixes respectives : $z_A = -1+i$, $z_B = \frac{i}{2}$, $z_C = -\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$ et $z_D = 2-i$.

Soit f l'application définie par $f(z) = \frac{2z-i}{z+1-i}$, pour $z \neq -1+i$.

1) Placer A, B, C, et D dans le repère ci-dessous.



2) Déterminer l'image $f(z_D)$ de z_D par f (on donnera le résultat sous forme algébrique).

3) On pose $z = x+iy$ où x et y sont des réels.

Montrer que : $Re(f(z)) = \frac{2x^2+2y^2+2x-3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$ et $Im(f(z)) = \frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$

4) a) Déterminer, puis construire, l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel.

b) Vérifier, par le calcul (et sur le dessin) que B appartient à cet ensemble E.

5) a) Déterminer, puis construire, l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

b) Vérifier, par le calcul (et sur le dessin) que B et C appartiennent à cet ensemble F.

6) a) Déterminer la forme algébrique du quotient $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ puis déterminer sa forme trigonométrique.

b) Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

Correction de l'exercice type bac 2 sur les nombres complexes (avec application f(z))

" vérification à la calculatrice "

1) Voir graphique

2) $f(z_D) = \dfrac{2z_D - i}{z_D + 1 - i} = \dfrac{2\times(2-i)-i}{(2-i)+1-i} = \dfrac{(4-3i)\times(3+2i)}{(3-2i)\times(3+2i)} = \dfrac{18}{13} - \dfrac{1}{13}i$

3) Mettons $f(z)$ sous forme algébrique :

$$f(z) = \frac{2\times(x+iy)-i}{(x+iy)+1-i} = \frac{(2x+i(2y-1))\times((x+1)-i(y-1))}{((x+1)+i(y-1))\times((x+1)-i(y-1))}$$

$$= \frac{[2x(x+1)+(2y-1)(y-1)] + i\,[(2y-1)(x+1)-2x(y-1)]}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2y^2+2x-3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2} + i\,\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

" Gros calculs mais on vous donnera la réponse pour continuer !! "

4)@ $f(z)$ est réel ssi $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ ssi $x+2y-1=0$ et $(x;y) \neq (-1;1)$

ssi $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $(x;y) \neq (-1;1)$

Ainsi : E correspond à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

ⓑ Comme $B(0;\frac{1}{2})$, on a : $-\frac{1}{2}\times x_B + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = y_B$ donc $B \in E$.

" les coordonnées vérifient le test. "

5)@ $f(z)$ est imaginaire pur ssi $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$

ssi $2x^2+2y^2+2x-3y+1=0$ et $(x;y)\neq(-1;1)$

ssi $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{4})^2 = \frac{5}{16}$ et $(x;y)\neq(-1;1)$

Ainsi : F correspond au cercle de centre $(-1;\frac{3}{4})$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{16}}$

ⓑ Comme $B(0;\frac{1}{2})$, on a : $(x_B+\frac{1}{2})^2 + (y_B-\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ donc $B\in F$

De même pour C.

6)@ $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{-1+i-(-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i)}{\frac{i}{2}-(-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i)} = \dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i} = \dfrac{(-3-i)\times(1+3i)}{(1-3i)\times(1+3i)} = \dfrac{0}{10} - \dfrac{10}{10}i = -i$ (forme algébrique)

d'où $\left|\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

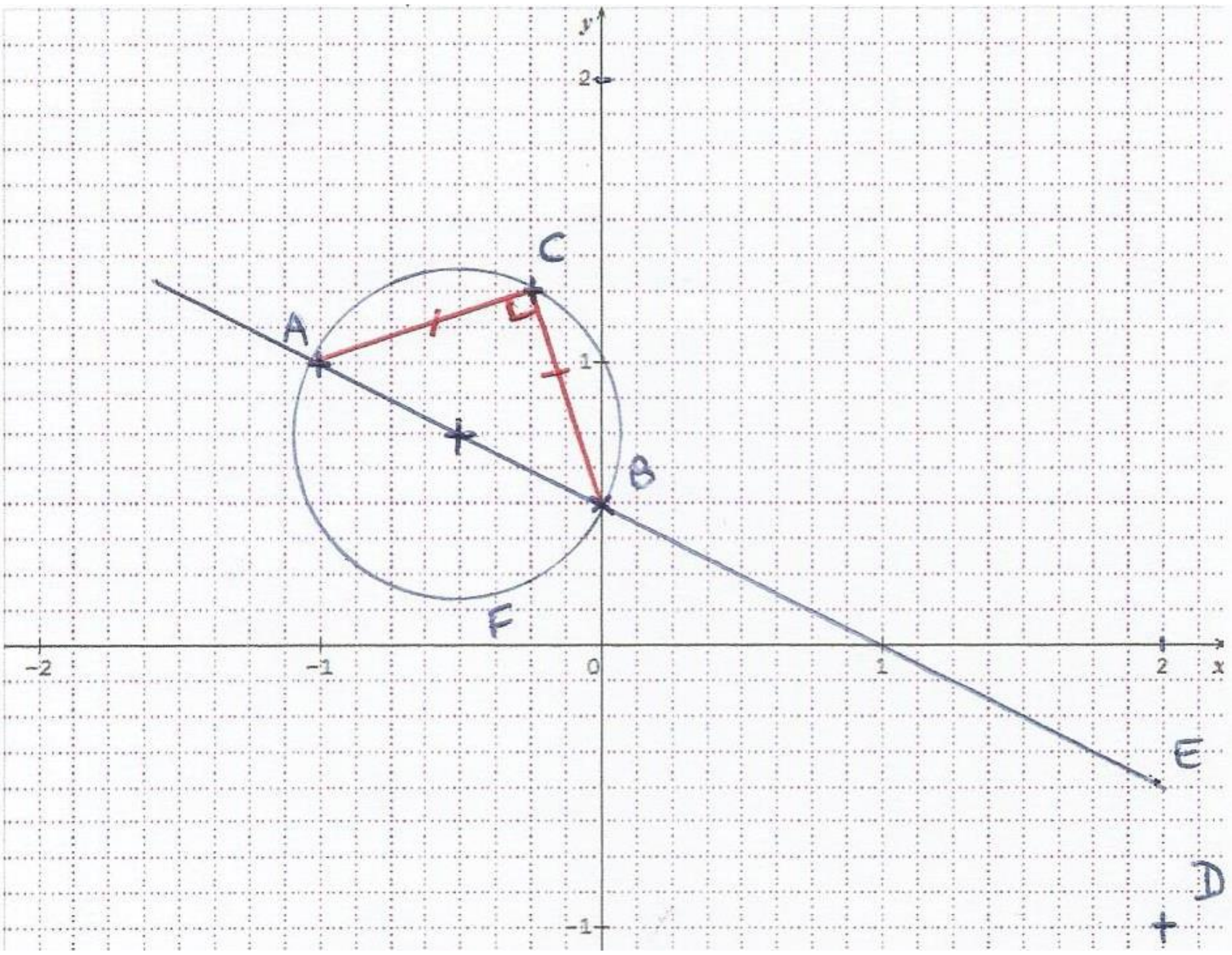
donc $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C} = 1\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ (forme trigo)

ⓑ Comme $|Z| = 1$, on a : $|z_A - z_C| = |z_B - z_C|$ d'où $AC = BC$

Comme $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2}$, on a : $(\vec{CB};\vec{CA}) = -\frac{\pi}{2}$ d'où $(CB)\perp(CA)$

Ainsi ABC est isocèle rectangle en C.

Figure de l’exercice type bac 2 sur les nombres complexes :



EXERCICE TYPE BAC 3 sur les nombres complexes (avec une suite (z_n))

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. Établir que pour tout entier naturel n : $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.
En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

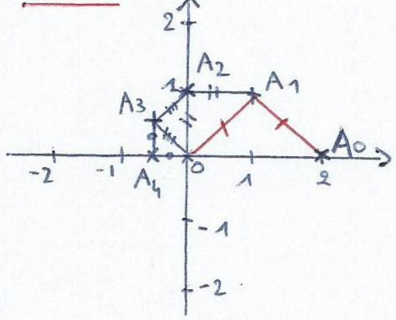
Correction exercice (complexe et suite)

1) $z_1 = \frac{1+i}{2} \times 2 = \underline{\underline{1+i}}$

$z_2 = \frac{1+i}{2} \times (1+i) = \underline{\underline{i}}$

$z_3 = \frac{1+i}{2} \times i = \underline{\underline{-0{,}5 + 0{,}5i}}$

$z_4 = \underline{\underline{-0{,}5}}$



2) $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2} \times z_n\right|$

$= \left|\frac{1+i}{2}\right| \times |z_n|$

$= \underline{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| \times u_n}$

or, $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

d'où $\underline{\underline{u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n}}$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de 1er terme $u_0 = |z_0| = |2| = \underline{\underline{2}}$

Ainsi : $u_n = u_0 \times q^n = \underline{\underline{2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}}$

3) A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1

ssi $OA_n \leq 0{,}1$

ssi $|z_n| \leq 0{,}1$

ssi $\underline{\underline{u_n \leq 0{,}1}}$

"on traduit l'hypothèse par rapport à notre suite".

or, avec la calculatrice, en prenant $Y_1 = 2*(1/\sqrt{2})\text{^}X$ on a :

X	Y_1
0	2
⋮	
8	0,125
9	0,089

d'où $u_8 > 0{,}1$ et $u_9 < 0{,}1$

Ainsi : $\underline{\underline{n_0 = 9}}$.

4) $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n}$

$= \frac{\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)\cancel{z_n}}{\frac{1+i}{2}\cancel{z_n}} = \frac{\frac{1+i-2}{2}}{\frac{1+i}{2}}$

$= \frac{\frac{i-1}{2}}{\frac{1+i}{2}} = \frac{i-1}{2} \times \frac{2}{1+i}$

$= \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)\times(1-i)}{(1+i)\times(1-i)}$

$= \frac{2i}{2} = \underline{\underline{i}}$ puis $\begin{cases} |i| = 1 \\ \text{et } \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

or MODULE	ARGUMENT
$\left\lvert\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right\rvert = 1$	$\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$
$\frac{\lvert z_{n+1}-z_n\rvert}{\lvert z_{n+1}-z_0\rvert} = 1$	$\underline{\underline{\left(\overrightarrow{A_0A_{n+1}} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2}}}$
$\lvert z_{n+1}-z_n\rvert = \lvert z_{n+1}-z_0\rvert$	↓
$\underline{\underline{A_nA_{n+1} = A_0A_{n+1}}}$	OA_nA_{n+1} est $\underline{\text{rectangle}}$ en A_n.
↓	
OA_nA_{n+1} est $\underline{\text{isocèle}}$ en A_n	

Ainsi : $\boxed{OA_nA_{n+1} \text{ est isocèle rectangle en } A_n}$