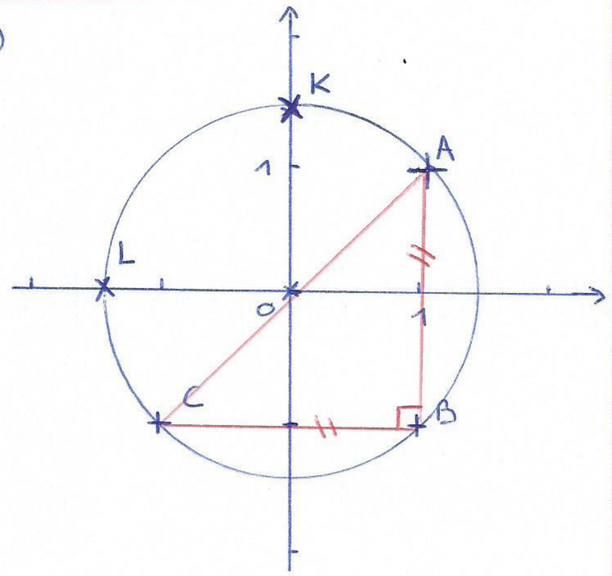
Corrigé du DM 5 – TS 1 –

exercice 1 :

1)



2) A, B, K et L sont sur un même cercle de centre $O(0;0)$ ssi $OA = OB = OK = OL$

or, $OA = |z_A - z_O| = |(1+i) - 0| = |1+i|$
$= \sqrt{1^2 + 1^2}$
$= \sqrt{2}$

de même $OB = \sqrt{2}$; $OK = \sqrt{2}$ et $OL = \sqrt{2}$

donc $OA = OB = OK = OL$

Ainsi : A, B, K et L sont sur le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3) M est le milieu de $[KL]$

ssi $z_M = \dfrac{z_K + z_L}{2}$

or, $\dfrac{z_K + z_L}{2} = \dfrac{i\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$

(forme algébrique)

et $z_M = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$

Ainsi : $z_M = \dfrac{z_K + z_L}{2}$

et M est bien le milieu de $[KL]$

4) $C(-1;-1)$ donc $z_C = -1 - i$

ⓐ $z = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{(-1-i)-(1-i)}{(1+i)-(1-i)}$

$= \dfrac{-2}{2i} = \dfrac{-1 \times (-i)}{i \times (-i)} = \dfrac{i}{+1} = i$

(forme algébrique)

$r = |z| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

avec $\theta = \arg(z)$ on a :

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin\theta = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Ainsi : $z = 1 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

(forme trigonométrique)

ⓑ Interp. module

$|z| = 1$

$\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$

$\dfrac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = 1$

$\dfrac{BC}{BA} = 1$

d'où $BC = BA$

Interp. argument

$\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$(\vec{BA} ; \vec{BC}) = \dfrac{\pi}{2}$

d'où $(BA) \perp (BC)$

ⓒ Comme $BC = BA$, le triangle ABC est isocèle en B.

De plus, $(BA) \perp (BC)$ donc le triangle ABC est aussi rectangle en B.

Ainsi : ABC est isocèle rectangle en B

exercice 2

1) $r = |a| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

Avec $\theta = \arg(a)$ on a :

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}/2}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

donc $a = 1 \times \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Ainsi : $a = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ (forme exponentielle)

ⓑ $f(a) = a + \frac{1}{a}$ astuce : "utiliser la forme exp. pour faire le calcul"

$= e^{\frac{3i\pi}{4}} + \frac{1}{e^{\frac{3i\pi}{4}}}$

$= e^{\frac{3i\pi}{4}} + e^{-\frac{3i\pi}{4}}$

$= \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
$+ \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ (forme algébrique)

2) on veut résoudre : $f(z) = 1$

c'est-à-dire : $z + \frac{1}{z} = 1$ astuce : $\times z$

$z^2 + 1 = z$

$z^2 - z + 1 = 0$ "pour se ramener à Δ"

$\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times1 = 1-4 = -3 < 0$

il y a 2 solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{-(-1) - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

puis $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

exercice ③

1)ⓐ $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

"plus facile de partir de la forme exponentielle"

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right)$

$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$

$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$

ⓑ $z_1 = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times z_0$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \times 1$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ (forme exponentielle)

$z_2 = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times z_1$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\times e^{i\frac{\pi}{6}}\times e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{4}{3}\times e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{4}{3}\times e^{\frac{2i\pi}{6}} = \frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ (forme exponentielle)

2)ⓐ Par récurrence :

- Soit $P(n)$: " $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ " pour tout entier $n \geq 0$.
- Montrons que : $P(0)$ est vrai.

$z_0 = 1$ et $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{i0\frac{\pi}{6}} = 1\times1 = 1$

donc $z_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{i0\frac{\pi}{6}}$ et $P(0)$ est vraie

- On suppose que : $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq 0$.

on a donc $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$. (*)

Montrons que : $P(n+1)$ est vraie

$z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times z_n$ (question 1)ⓐ)

$= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ (d'après (*))

$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : P(n) est vraie pour n = 0 et est héréditaire, donc P(n) est vraie pour tout entier $n \geq 0$, c'est à dire :

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$$

(b) O, A_0 et A_n sont alignés

(ssi) $\arg(z_n) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\div\pi \;\; n\frac{\pi}{6} = k\pi \;\; \div\pi$$

$$\times 6 \;\; \frac{n}{6} = k \;\; \times 6$$

$$n = 6k \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

Donc les points A_n alignés avec O et A_0 sont ceux d'indices $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$ (ex : A_0, A_6, A_{12}, A_{18} ....) "multiple de 6".

3) (a) $d_n = |z_{n+1} - z_n| = A_nA_{n+1}$

"réflexe : module ⇒ distance"

(b) $d_0 = |z_{0+1} - z_0| = |z_1 - z_0|$

$= \left|\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1\right| = \left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

$= \sqrt{0^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$

$= \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$

(d) $d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$ "question 3)(c)"

$= \left|\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right|$ "propriété des modules"

$= \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n|$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times d_n$ (question 1)(a))

donc (d_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et de 1er terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d'où $d_n = d_0 \times q^n$

Ainsi : $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

4) (a) * $Z = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_n} = \frac{\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n - z_n}{z_n}$

$= \frac{\cancel{z_n}\left(\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1\right)}{\cancel{z_n} \times 1} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ (forme algébrique)

* $r = |Z| = \left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Avec $\theta = \arg(Z)$, on a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{\sqrt{3}/3} = 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{3}/3} = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{2}$$

donc $Z = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

(forme trigonométrique)

(b) Comme $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$

on a : $\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n}\right) = \frac{\pi}{2}$

d'où $(\overrightarrow{OA_n} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \frac{\pi}{2}$

"remplace le Z manquant"

Ainsi : $(OA_n) \perp (A_nA_{n+1})$ et OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

(c) (1) On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{A_4OA_6}$

(2) On trace le cercle de diamètre $[OA_6]$

(3) Le point d'intersection entre cette bissectrice et ce cercle donne le point A_5.