Chapitre - 16 – Calcul intégral (Partie II)

I] Intégrale d'une fonction continue (pas nécessairement positive)

1) Définition

Définition : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx =$ ………………………………………………

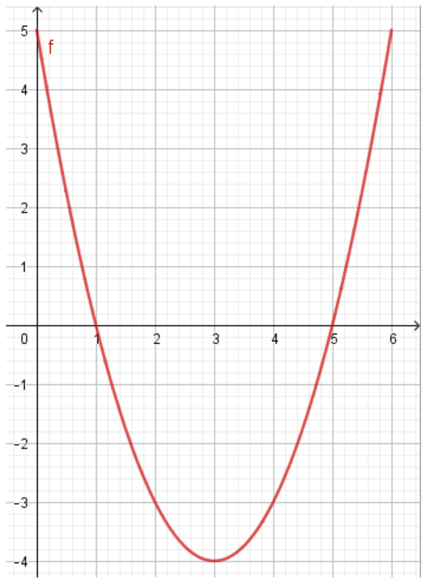
En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on détermine d'abord une ……………………………………………………………
puis on calcule : ……………………………………
Avec la « notation crochet », cela donne :……………………………………………………………………………………………………

Exemple : $\int_{-2}^{1}(3x^2+1)dx =$………

2) Généralisation de la notion « d'aire sous la courbe » aux fonctions qui ne sont plus nécessairement positives

Il y a deux causes qui peuvent engendrer un résultat négatif pour une intégrale :

- La fonction intégrée est négative sur une partie de l'intervalle :



Exemple : $\int_0^6(x^2-6x+5)dx =$ ………………………………………………

$=$ ………………………………………………

$=$ ……………………………………………………………………………………………

$=$ ……………………………………………………………………………………………

Remarque : La notion « d'aire sous la courbe » se généralise aux fonctions qui ne sont plus nécessairement positives en « aire entre ……………………………… et ………………………………………………………………
avec les surfaces situées …………………………… de ………………………………………………………… comptées ………………………
et les surfaces situées …………………………… de ………………………………………………………… comptées ………………………

- Les bornes de l'intégrales ne sont plus dans l'ordre croissant :

Exemple : $\int_3^1 3x^2dx =$ ……

3) Propriétés des intégrales

Propriété : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors :

(1) $\int_a^a f(x)dx =$ ………

(2) $\int_b^a f(x)dx =$ ………………………

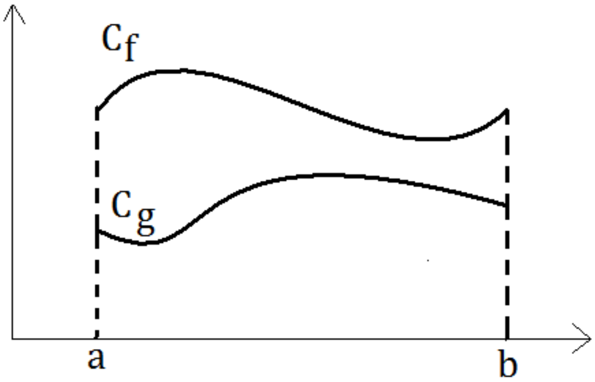
(3) $\int_a^b k \times f(x)dx =$ ………………………

(4) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx =$ …………………………………

(5) $\int_a^b f(x)dx =$ …………………………………………………

(6) Si $a < b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $\in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ …… 0

(7) Si $a < b$ et si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $\in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ …… $\int_a^b g(x)dx$



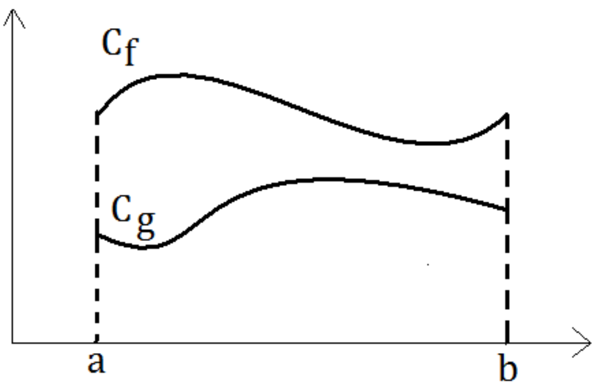
➔ Exercice 90 p 182

II] Applications du calcul intégral

1) Surface entre 2 courbes

Propriété : Si f et g sont deux fonctions continue sur $[a;b]$, telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors l'aire, en unités d'aires, de la surface entre les courbes C_f et C_g et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ se calcule en faisant:

……

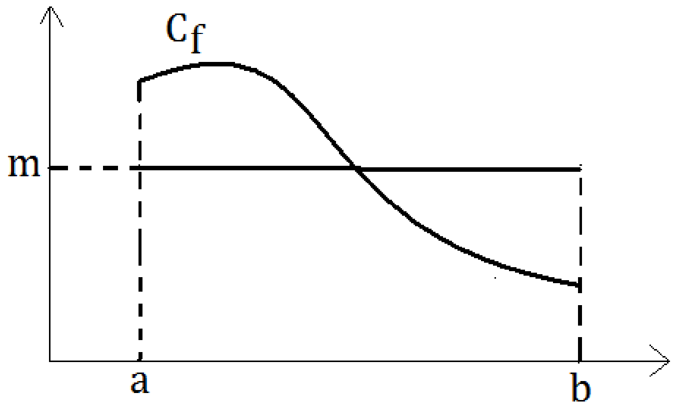


➔ Exercice 106 p 183

2) Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, on appelle « valeur moyenne de f sur $[a;b]$ » le nombre suivant : $m =$ ……………………………………………

Remarque : Graphiquement m correspond au niveau que devrait avoir f tout en conservant la même aire.

Illustration :	Démonstration:
	

Exemple : Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[2\,;7]$

……

➔ Exercice 116 p 184

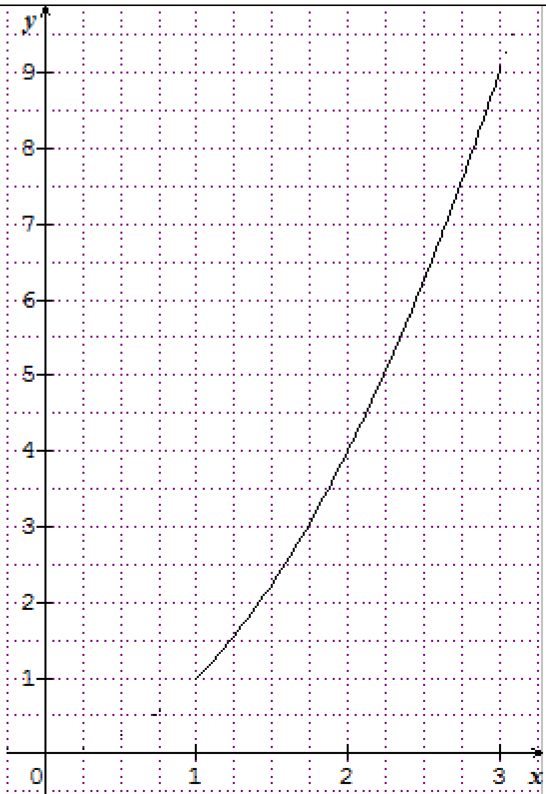
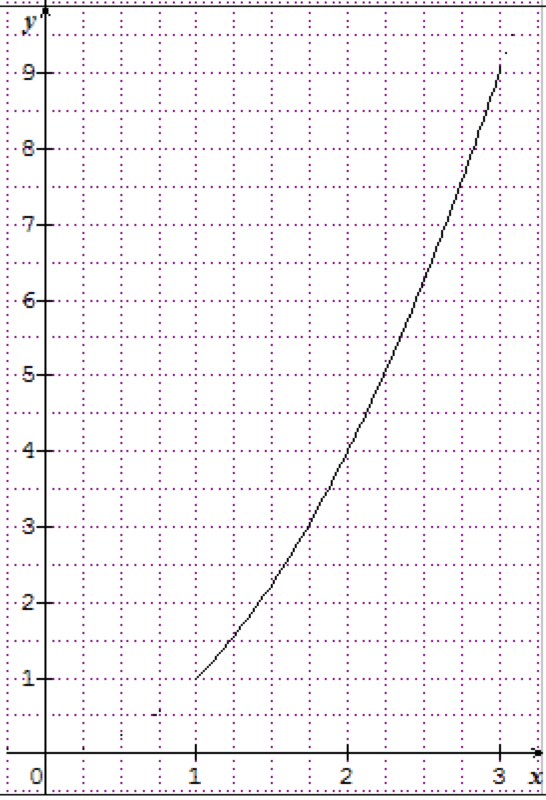
III] Encadrement de l'intégrale d'une fonction

1) Algorithme (Méthode des rectangles)

Méthode : Pour obtenir un encadrement de l'intégrale d'une fonction continue monotone et positive sur l'intervalle $[a;b]$ on va subdiviser l'intervalle $[a;b]$ en n intervalle de même amplitude $h =$…………… afin de construire n « rectangles basés à gauche » et n « rectangles basés à droite ». La somme des aires de ses rectangles donnera un encadrement de l'intégrale.

Etape 1 : (Exemple) Nous cherchons à obtenir un encadrement de l'intégrale : $\int_1^3 x^2 dx$.

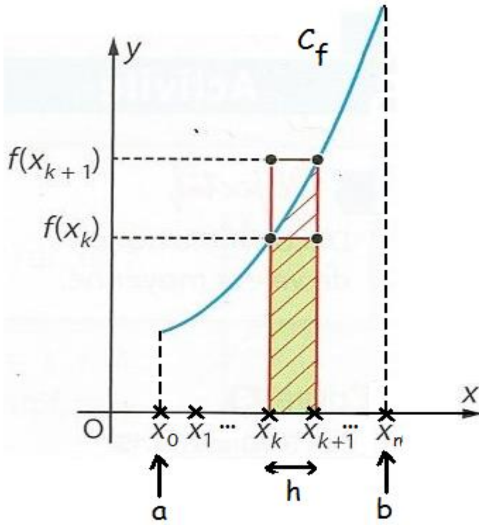
Pour cela, je vous propose d'effectuer les deux découpages suivants :

n	h	Dessin des rectangles pour l'encadrement	Encadrement de $\int_1^3 x^2 dx$
$n = 2$			
$n = 4$			

Remarques :

Etape 2 : Généralisation

- Si on appelle x_0, x_1, x_2 , …… , x_n les points de la subdivision de l'intervalle $[a; b]$.
  On a alors : $x_0 =$…… , $x_n =$……
  et $x_{k+1} =$………………………………
- Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ on a :
  - L'aire du rectangle basé à gauche qui est égale à : ………………………………
  - L'aire du rectangle basé à droite qui est égale à : ………………………………



Etape 3 : L'Algorithme des rectangles

Language naturel	Algorithme	Programme

On entre les bornes a et b et n le nombre de sous intervalles souhaités.
 	
On calcule l'amplitude h des sous intervalles.
 	
On initialise les variables : x représente la position sur l'axe des abscisses, u contiendra la somme des rectangles basés à gauche et v la somme des rectangles basés à droites.
 	
On numérote par k les sous intervalles de 0 à $n-1$.
 	
Quand on arrive sur l'intervalle numéro k, alors x correspond au début de l'intervalle, on peut donc calculer l'aire du rectangle basé à gauche et l'ajouter à l'aire précédente. Puis on fait évoluer x pour se placer à la fin de l'intervalle numéro k afin de calculer l'aire du rectangle basé à droite et l'ajouter à l'aire précédente.
	Saisir *a*, *b*, *n*
	h prend la valeur
	x prend la valeur *a*
	u prend la valeur 0
	v prend la valeur 0
	Pour *k* variant de 0 à *n* – 1
	  u prend la valeur
	  x prend la valeur
	  v prend la valeur
	Fin Pour
	Afficher *u*, *v*
		Prompt *A*
		Prompt *B*
		Prompt *N*
		→*H*
		A→*X*
		0→*U*
		0→*V*
		For (K,0,*N*−1)
		→*U*
		→*X*
		→*V*
		End
		Disp *u*
		Disp *v*

Etape 4 : Exécution de l'algorithme des rectangles

Faire tourner cet algorithme dans le tableau ci-dessous pour la fonction $f(x) = x^2$ avec $n = 4$, $a = 1$ et $b = 3$.

Dans ce cas, h est donc égale à :

Variables	Initialisation	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
u					
x					
v					

Etape 5 : Influence de n

Avec $n = 10$, on obtient : .... $\leq \int_1^3 x^2 dx \leq$ ....

Avec $n = 100$, on obtient : .... $\leq \int_1^3 x^2 dx \leq$ ....

Avec $n = 1000$, on obtient : .... $\leq \int_1^3 x^2 dx \leq$ ....

Etape 6 : Vérification

$\int_1^3 x^2 dx =$ ....

Remarque :

2) En encadrant d'abord la fonction sous l'intégrale

Méthode : Si on ne sait pas calculer directement $\int_a^b f(x)dx$ mais que pour tout $x \in [a; b]$, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ alors nous pouvons faire :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

....

Il ne reste plus qu'à calculer .... et .... pour obtenir notre encadrement.

➔ Exercice 95 p 182