Chapitre - 13 – Loi de probabilité à densité (Partie I)

I] Loi de probabilité à densité

1) Variable aléatoire continue

Une classe de Terminale S passe son épreuve de mathématiques au BAC. On rappelle qu'un candidat doit rester au minimum 1 heure pour composer et que l'épreuve dure 4 heures.

Une fois l'épreuve terminé, on interroge un élève au hasard. On appelle X le temps, en heures, que le candidat a passé dans la salle d'examen.

Es-ce que la valeur de X dépend de l'élève interrogé ?

……………… . C'est pour cela que X s'appelle variable ……………………………… .

Quelles valeurs la variable X peut-elle prendre ?

…… .

C'est pour cela que l'on dit que la variable X est ……………………………… .

Intéressons-nous maintenant à différents évènements de cette expérience aléatoire.

Sachant que l'évènement $(X \leq 2)$ correspond à l'évènement : « le candidat est resté moins de 2h00 dans la salle d'examen ».

Compléter les phrases suivantes :

- L'évènement $(1{,}5 \leq X \leq 2)$ correspond à l'évènement :
  « ……… ».
- l'évènement $(X = 1{,}25)$ correspond à l'évènement :
  « ……… ».
- l'évènement …………………………… correspond à l'évènement : « le candidat est resté strictement plus de 2h45mn dans la salle d'examen ».

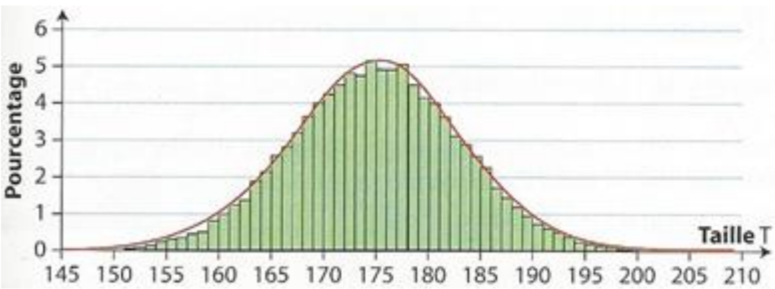
2) Densité associée à une variable aléatoire continue

a) Activité

Un commerçant vend un stock de vêtements dont la taille convient à des hommes adultes mesurant de $1{,}70$ m à $1{,}77$ m.

Objectif de l'étude : On se propose de déterminer avec quelle probabilité il pourra satisfaire un client qui entre au hasard dans son magasin.

Pour cela voici, ci-dessous, l'histogramme obtenu pour un échantillon de $50\,000$ hommes adultes.



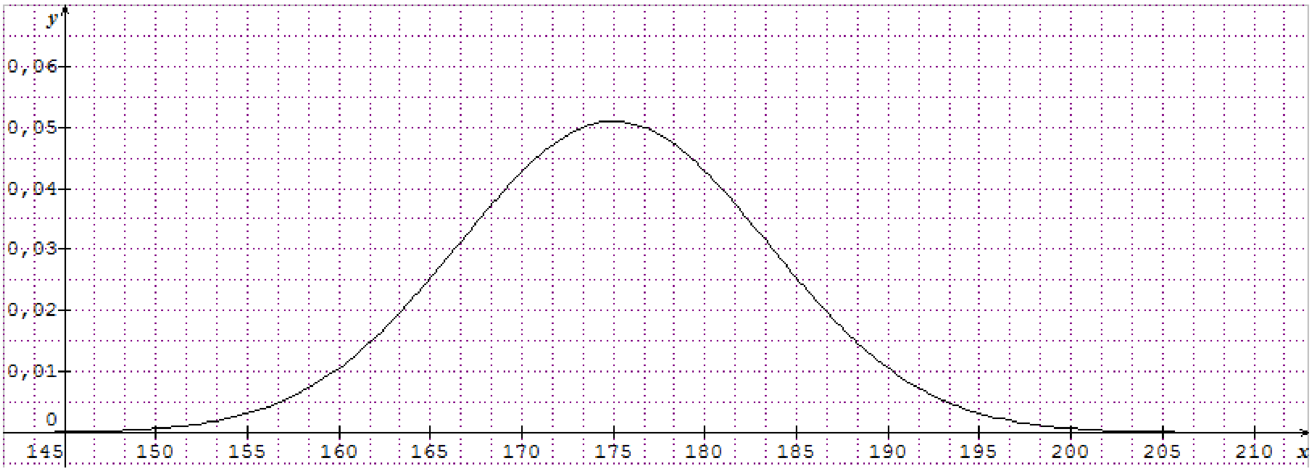
1) Estimer graphiquement la proportion des individus dont la taille est entre $1{,}70$ m à $1{,}77$ m.

……

……

2) On a tracé, ci-dessous, la courbe de la fonction f qui représente au mieux le profil de l'histogramme.

On dit que f est « la densité de la variable aléatoire T ». (où T représente la taille en cm de la personne entrant dans le magasin)



a) Représenter sur le graphique ci-dessus la probabilité de l'évènement $(170 \leq T \leq 177)$.

b) Quelle doit être l'aire total sous la courbe de f ?

………

3) Après de longues heures de recherche votre professeur à déterminer l'expression algébrique de cette fonction f. <u>Il affirme que</u> : $f(x) = 0{,}051 \times e^{-0{,}008(x-175)^2}$.

a) En déduire avec cette nouvelle information la probabilité de l'évènement $(170 \leq T \leq 177)$.

………

b) Conclure.

………

………

b) Définitions

<u>Définition</u> : On dit que f est une « densité de probabilité sur l'intervalle $[a;b]$ » si :

(1) f est ………………………… et …………………………… sur $[a\,;b]$

(2) $\int_a^b f(x)dx =$……

<u>Exercice</u> : Justifier que la fonction f définie par : $f(x) = 0{,}06x - 0{,}006x^2$ est une densité de probabilité sur $[0; 10]$.

<u>Solution</u> : ……

……………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

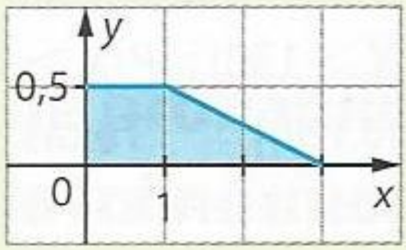
……

<u>Définition</u> : Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a;b]$.
Soit f une densité de probabilité sur $[a;b]$.
Alors on dit que « X suit la loi de probabilité de densité f » si :
Pour tout $\begin{cases} c \in [a;b] \\ d \in [a;b] \end{cases}$ avec $c \leq d$, on a : $P(c \leq X \leq d) =$

<u>Propriété</u> : Avec les notations de la définition précédente, on a :
(1) $P(a \leq X \leq b) =$
(2) $P(X = c) =$
(3) $P(c \leq X \leq d) =$
(4) $P(c \leq X \leq d) =$

➔ Faire les exercices 4, 1 et 2 p 334 (pour mardi 31 Mars)

4 Le graphique ci-contre représente la fonction de densité de probabilité f d'une variable aléatoire X continue sur $[0\,;3]$.



Calculer les probabilités suivantes :

a. $P(X > 0)$ **b.** $P(0 < X < 1)$

c. $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$ **d.** $P(X < 0{,}6)$ **e.** $P(X > 0{,}5)$

1 X est une variable aléatoire à densité sur $[3\,;10]$.

On donne $P(X < 5) = 0{,}6$.

Déterminer les probabilités suivantes :

a. $P(X = 5)$ **b.** $P(X \leqslant 5)$

c. $P(X > 5)$ **d.** $P(5 < X < 10)$

2 X est une variable aléatoire à densité sur $[2\,;11]$.

On donne $P(X \leqslant 4) = 0{,}2$ et $P(X > 7) = 0{,}5$.

Déterminer les probabilités suivantes :

a. $P(X > 4)$ **b.** $P(X > 11)$

c. $P(X < 7)$ **d.** $P(4 < X < 7)$

3) Espérance

> Définition : Soit X une variable aléatoire continue de densité f sur $[a;b]$.
> Alors l'espérance mathématiques de X (c'est-à-dire la valeur prise en moyenne par X) se calcule à l'aide de la formule suivante : $E(X) =$ ……………………………………………

Exercice : X est une variable aléatoire continue de densité f sur $[0;10]$ définie par :

$$f(x) = 0{,}06x - 0{,}006x^2.$$

Calculer $E(X)$.

Solution : ………

………

………

………

………

………

………

➔ Faire exercices 38 p 336 (pour mardi 31 Mars)

38 Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 5x^4$.

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité.

2. X est la variable aléatoire continue sur $[0\,;1]$ dont la loi a pour densité de probabilité la fonction f définie à la question **1.** Calculer :

a. $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$ **b.** $P(X > 0{,}1)$

c. $P(0{,}2 < X \leqslant 0{,}8)$ **d.** $E(X)$

Chapitre - 13 - Loi de probabilité à densité (Partie I)

I] Loi de probabilité à densité

1) Variable aléatoire continue

Une classe de Terminale S passe son épreuve de mathématiques au BAC. On rappelle qu'un candidat doit rester au minimum 1 heure pour composer et que l'épreuve dure 4 heures.

Une fois l'épreuve terminé, on interroge un élève au hasard. On appelle X le temps, en heures, que le candidat a passé dans la salle d'examen.

Es-ce que la valeur de X dépend de l'élève interrogé ?
OUI . C'est pour cela que X s'appelle variable aléatoire .

Quelles valeurs la variable X peut-elle prendre ?
X peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[1;4]$.
C'est pour cela que l'on dit que la variable X est continue .

Intéressons-nous maintenant à différents évènements de cette expérience aléatoire.
Sachant que l'évènement $(X \leq 2)$ correspond à l'évènement : « le candidat est resté moins de 2h00 dans la salle d'examen ».

Compléter les phrases suivantes :

- L'évènement $(1{,}5 \leq X \leq 2)$ correspond à l'évènement :
  « le candidat est resté entre 1h30mn et 2h00 dans la salle ».
- l'évènement $(X = 1{,}25)$ correspond à l'évènement :
  « le candidat est resté exactement 1h15mn dans la salle ».
- l'évènement $(X > 2{,}75)$ correspond à l'évènement : « le candidat est resté strictement plus de 2h45mn dans la salle d'examen ».

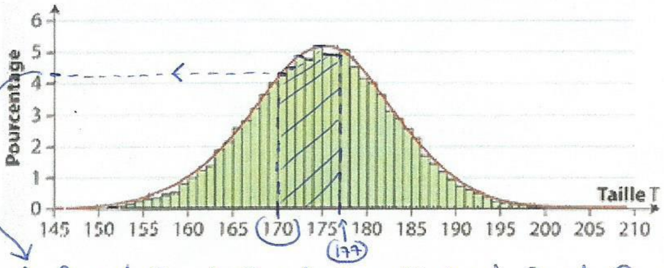
2) Densité associée à une variable aléatoire continue

a) Activité

Un commerçant vend un stock de vêtements dont la taille convient à des hommes adultes mesurant de 1,70 m à 1,77 m.

Objectif de l'étude : On se propose de déterminer avec quelle probabilité il pourra satisfaire un client qui entre au hasard dans son magasin.

Pour cela voici, ci-dessous, l'histogramme obtenu pour un échantillon de 50 000 hommes adultes.



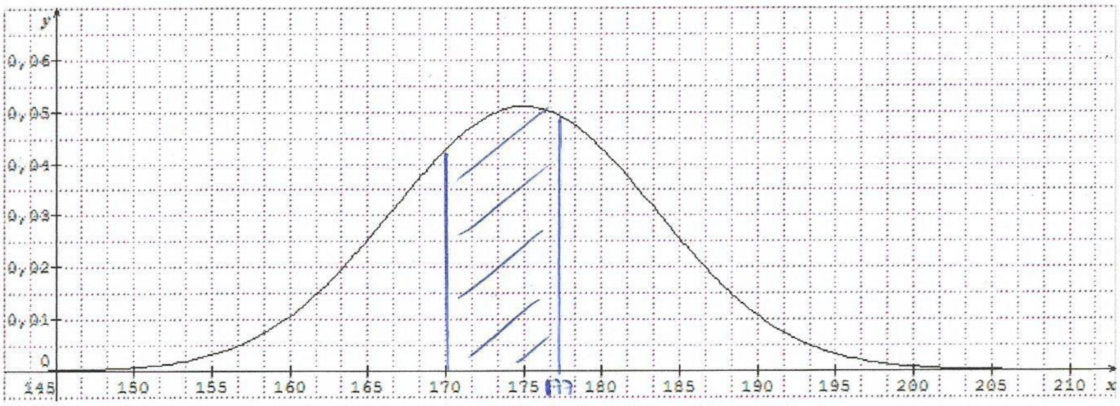
1) Estimer graphiquement la proportion des individus dont la taille est entre 1,70 m à 1,77 m.

$4{,}2 + 4{,}5 + 4{,}8 + 4{,}7 + 5{,}1 + 4{,}9 + 4{,}9 = 33{,}1\%$ (grâce à l'histogramme)

Il y a environ 33,1% des individus qui mesurent entre 1,70m et 1,77m

2) On a tracé, ci-dessous, la courbe de la fonction f qui représente au mieux le profil de l'histogramme.

On dit que f est « la densité de là variable aléatoire T ». (où T représente la taille en cm de la personne entrant dans le magasin)



a) Représenter sur le graphique ci-dessus la probabilité de l'évènement $(170 \leq T \leq 177)$.

b) Quelle doit être l'aire total sous la courbe de f ?

L'aire total sous la courbe de f vaut 1 u.a car elle correspond à 100%.

3) Après de longues heures de recherche votre professeur à déterminer l'expression algébrique de cette fonction f. Il affirme que : $f(x) = 0{,}051 \times e^{-0{,}008(x-175)^2}$.

a) En déduire avec cette nouvelle information la probabilité de l'évènement $(170 \leq T \leq 177)$.

$P(170 \leq T \leq 177) = \int_{170}^{177} f(x)\,dx = $ intégfonction$(Y_1, X, 170, 177) \simeq 0{,}34$

"calculatrice"

b) Conclure.

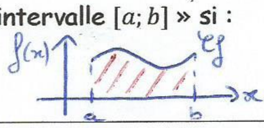
Le magasin pourra satisfaire environ 34% des clients qui entre.

b) Définitions

Définition : On dit que f est une « densité de probabilité sur l'intervalle $[a; b]$ » si :

(1) f est continue et positive sur $[a\,; b]$

(2) $\int_a^b f(x)dx = 1$



Exercice : Justifier que la fonction f définie par : $f(x) = 0{,}06x - 0{,}006x^2$ est une densité de probabilité sur $[0; 10]$.

Solution : f est un polynôme donc continue sur $[0;10]$ et $\Delta = 0{,}036 > 0$; 0 ; 10

x	$-\infty$ 0 10 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

du signe de $a = -0{,}006 < 0$ à l'extérieur des racines donc f est positive sur $[0;10]$

Enfin, on doit calculer : $\int_0^{10} f(x)\,dx = \left[0{,}06\times\frac{x^2}{2} - 0{,}006\times\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$

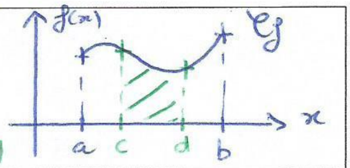
$= \left(0{,}06\times\frac{10^2}{2} - 0{,}006\times\frac{10^3}{3}\right) - 0$

$= \frac{6}{2} - \frac{6}{3}$

$= \frac{18-12}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Ainsi : f est une densité de probabilité sur $[0;10]$

Définition : Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a;b]$.
Soit f une densité de probabilité sur $[a;b]$.
Alors on dit que « X suit la loi de probabilité de densité f » si :
Pour tout $\begin{cases} c \in [a;b] \\ d \in [a;b] \end{cases}$ avec $c \leq d$, on a : $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx$



Propriété : Avec les notations de la définition précédente, on a :
(1) $P(a \leq X \leq b) = 1$
(2) $P(X = c) = p(c \leq X \leq c) = 0$ ("pas de surface entre "c" et "c"")
(3) $P(c \leq X \leq d) = p(c < X \leq d) = p(c \leq X < d) = p(c < X < d)$. → "les symboles stricte ou pas non pas d'importance pour les probas de ce chapitre" (loi à densité).
(4) $P(c \leq X \leq d) = p(X \leq d) - p(X \leq c)$

ex : $p(2 \leq X \leq 4) = p(2 < X < 4)$

➔ Exercices 4, 1 et 2 p 334

3) Espérance

Définition : Soit X une variable aléatoire continue de densité f sur $[a;b]$.
Alors l'espérance mathématiques de X (c'est-à-dire la valeur prise en moyenne par X) se calcule à l'aide de la formule suivante : $E(X) = \int_a^b x\, f(x)\,dx$

⚠ ← "à ne pas oublier" sinon le résultat sera de 1.

Exercice : X est une variable aléatoire continue de densité f sur $[0;10]$ définie par :

$$f(x) = 0{,}06x - 0{,}006x^2.$$

Calculer $E(X)$.

Solution : $E(X) = \int_0^{10} x \times f(x)\,dx = \int_0^{10} 0{,}06x^2 - 0{,}006x^3\,dx$

$= \left[0{,}06\times\frac{x^3}{3} - 0{,}006\times\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}$

$= \left(0{,}06\times\frac{10^3}{3} - 0{,}006\times\frac{10^4}{4}\right) - 0$

$= \frac{60}{3} - \frac{60}{4} = \frac{240}{12} - \frac{180}{12} = \frac{60}{12} = \frac{10}{2} = 5$

➔ Exercice 38 p 336