Corrigé

exercice 1 /5 (1 point par question)

proposition 1 :

$C \in D$ ssi $\begin{cases} 4 = 2t \\ 3 = 1+t \\ 1 = -5+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

or, $\begin{cases} 4 = 2t \\ 3 = 1+t \\ 1 = -5+3t \end{cases}$ $\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$ "COMPATIBLE"

donc $C \in D$ ⇝ $\boxed{\text{VRAIE}}$

proposition 2 :

D est dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

or, $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

donc D n'est pas dirigé par $\vec{AB}$ ⇝ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

proposition 3 :

(AB) passe $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et est dirigé par $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

donc une représentation paramétrique de (AB) est $(S)\begin{cases} x = 1+2t' \\ y = 1-t' \\ z = -t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

"ce n'est pas celle qui est proposée mais on sait qu'il n'existe pas qu'une seule représentation paramétrique pour une droite"

on peut donc vérifier que le point $E\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartient bien à (AB).

(en effet, c'est le point de paramètre $t' = 2$ dans (S)).

De plus, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{AB}$ (car $\vec{u} = -\vec{AB}$)

Ainsi il s'agit bien d'une autre représentation paramétrique de (AB)

⇝ $\boxed{\text{VRAIE}}$

proposition 4 :

D et (AB) sont coplanaires

ssi D et (AB) sont sécantes ou parallèles

- d'après la proposition 2, on sait qu'elles ne sont pas parallèles
- il reste à voir si elles sont sécantes.

D et (AB) sont sécantes ssi $\begin{cases} 2t = 5-2t' \\ 1+t = -1+t' \\ -5+3t = -2+t' \end{cases}$

or, $\begin{cases} 2(-2+t') = 5-2t' \\ t = -2+t' \\ -5+3t = -2+t' \end{cases}$

$\begin{cases} -4+2t' = 5-2t' \\ t = -2+t' \\ -5+3t = -2+t' \end{cases}$

$\begin{cases} 4t' = 9 \\ t = -2+t' \\ -5+3t = -2+t' \end{cases}$ $\begin{cases} t' = 2{,}25 \\ t = 0{,}25 \\ -4{,}25 = 0{,}25 \end{cases}$

"INCOMPATIBLE"

Ainsi : D et (AB) sont ni sécantes, ni parallèles.

Elles ne sont donc pas coplanaires

⇝ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

proposition 5 :

D et (ABC) sont sécants

ssi $\begin{cases} 2t = 1+2t'+3t'' \\ 1+t = 1-t'+2t'' \\ -5+3t = -t'+t'' \end{cases}$ avec $t, t', t'' \in \mathbb{R}$

↑ représentation paramétrique de (ABC) passant par A et dirigé par $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

or, $\begin{cases} 2(-t'+2t'') = 1+2t''+3t'' \\ t = -t'+2t'' \\ -5+3t = -t'+t'' \end{cases}$

$\begin{cases} t'' = 1+4t' \\ t = -t'+2t'' \\ -5+3(-t'+2t'') = -t'+t'' \end{cases}$

$\begin{cases} t'' = 1+4t' \\ t = -t'+2t'' \\ 18t' = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t'' = 1 \\ t = 2 \\ t' = 0 \end{cases}$ ← on remplace t par 2 dans D

donc D et (ABC) sont sécants au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (il s'agit de C)

⇝ VRAIE

Exercice ②

1) $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4\times1\times4 = 12-16 = \underline{\underline{-4<0}}$

donc 2 solutions complexes conjugués

$z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - i\sqrt{4}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{3} - i}}$

et $z_2 = \overline{z_1} = \underline{\underline{\sqrt{3} + i}}$

2) ⓐ $z_1 = 2^1 \times e^{i(-1)\frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$= 2\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\times\frac{1}{2}\right)$

$= \underline{\underline{\sqrt{3} - i}} \longrightarrow$ est bien solution de (E).

ⓑ $z_2 = 2^2 e^{i\times(-1)^2\times\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= 4\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

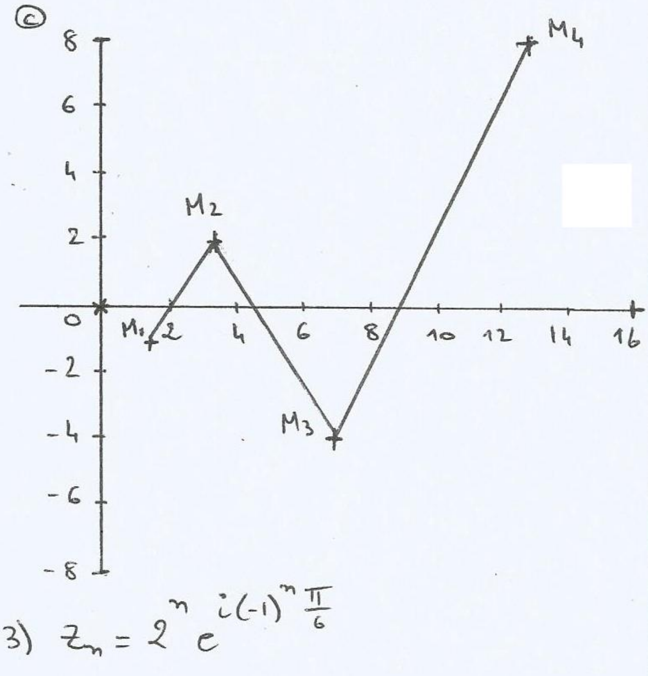
$= 4\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right)$

$= \underline{\underline{2\sqrt{3} + 2i}}$ (forme algébrique)

$z_3 = 2^3 e^{i(-1)^3\times\frac{\pi}{6}} = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$= 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\times\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{4\sqrt{3} - 4i}}$

ⓒ



3) $z_n = 2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$

* Cas où "n" est pair : $(-1)^n = 1$

d'où $z_n = 2^n e^{i\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \underline{\underline{2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}}$

Cas où "n" impair : $(-1)^n = -1$

d'où $z_n = 2^n e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \underline{\underline{2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}}$.

Ce qui donne de manière générale:

$$\underline{\underline{z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)}}.$$

4) $M_1M_2 = |z_2 - z_1|$

$= |(2\sqrt{3} + 2i) - (\sqrt{3} - i)|$

$= |\sqrt{3} + 3i|$

$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2}$

$= \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$

$M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \underline{\underline{4\sqrt{3}}} = 2^2\sqrt{3}$

10,5 "calcul similaire"

5) ⓐ $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n-1}$

$= 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + \dots + 2^n\sqrt{3}$

somme suite géométrique $= 1^{er}$ terme $\times \dfrac{\text{raison}^{\text{Nb de terme}} - 1}{\text{raison} - 1}$

$= 2\sqrt{3}\times\dfrac{2^n - 1}{2-1}$

$= \underline{\underline{2\sqrt{3}\times(2^n - 1)}}$

ⓑ $\ell_n \geq 1000$

$2\sqrt{3}(2^n - 1) \geq 1000$

$2^n - 1 \geq \dfrac{1000}{2\sqrt{3}}$

$2^n - 1 \geq \dfrac{500}{\sqrt{3}}$

$2^n \geq \dfrac{500}{\sqrt{3}} + 1$

$\ln(2^n) \geq \ln\left(\dfrac{500}{\sqrt{3}} + 1\right)$

$n\times\ln(2) \geq \ln\left(\dfrac{500}{\sqrt{3}} + 1\right)$

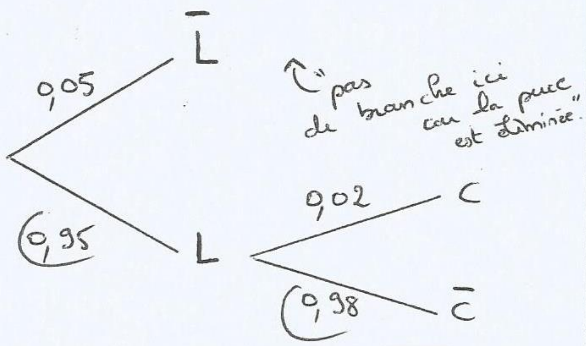
$n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln(2)} \simeq \underline{\underline{8,18}}$

Ainsi: C'est à partir de $\underline{\underline{n = 9}}$

exercice 3

1) a) $P_L(C) = \underline{\underline{0{,}02}}$ car 2% des puces livrées ont une durée de vie courte.

b) "On peut se servir de l'arbre ci-dessous"



$P(L\cap\bar{C}) = P(L)\times P_L(\bar{C})$
$= 0{,}95\times 0{,}98$
$= \underline{\underline{0{,}931}}$ ⊕ phrase.

c) Il s'agit de l'événement contraire au précédent, donc sa probabilité est :

$1 - P(L\cap\bar{C}) = 1 - 0{,}931 = \underline{\underline{0{,}069}}$

2) a) on sait que : $P(X\leq 1000) = 0{,}02$.

or $P(X\leq 1000) = P(0\leq X\leq 1000)$

$= \int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{1000}$

$= (-e^{-1000\lambda}+1) = \underline{\underline{1-e^{-1000\lambda}}}$

Donc $1-e^{-1000\lambda} = 0{,}02$

$-e^{-1000\lambda} = 0{,}02-1$

$-e^{-1000\lambda} = -0{,}98$

$e^{-1000\lambda} = 0{,}98$

$\ln(e^{-1000\lambda}) = \ln(0{,}98)$

$-1000\lambda = \ln(0{,}98)$

$\lambda = \dfrac{\ln(0{,}98)}{-1000} = \underline{\underline{\dfrac{-\ln(0{,}98)}{1000}}}$

b) $P(X\geq 10\,000) = 1 - P(X< 10\,000)$

$= 1 - P(0\leq X\leq 10\,000)$

$= 1 - \int_0^{10\,000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$= 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10\,000}$

$= 1 - (-e^{-10\,000\lambda}+1)$

$= e^{-10\,000\lambda} = e^{10\ln(0{,}98)} \simeq \underline{\underline{0{,}817}}$

c) $P(20\,000\leq X\leq 30\,000)$

$= \int_{20\,000}^{30\,000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{20\,000}^{30\,000}$

$= (-e^{-30\,000\lambda} + e^{-20\,000\lambda})$

$= e^{20\ln(0{,}98)} - e^{30\ln(0{,}98)}$

$\simeq \underline{\underline{0{,}122}}$ ⊕ phrase.

3) a) on répète $n = 15\,000$ fois, de manière indépendante, une expérience à 2 issues, dont la probabilité de succès est $p = 0{,}003$ (car Y compte les puces ayant une durée de vie courte dans cet échantillon).

Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $\underline{\underline{n = 15\,000}}$ et $\underline{\underline{p = 0{,}003}}$.

b) $E(Y) = n\times p = 15000\times 0{,}003 = \underline{\underline{45}}$

c) $P(40\leq Y\leq 50)$

$= P(Y\leq 50) - P(Y<40)$

$= P(Y\leq 50) - P(Y\leq 39)$

= binomfrep(15000, 0.003, 50)
 − binomfrep(15000, 0.003, 39)

$\simeq \underline{\underline{0{,}589}}$