Merci à Lola pour sa version des exercices 126 p 216 et 128 p 216

Exercice 126 page 216 :

1. $(1+i)^5$

$|z_1| = \sqrt{1^2+1^2}$

$= \sqrt{2}$

$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$

$|z_1|^n = (\sqrt{2})^5$

$\arg(z_1^n) = 5 \times \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Forme trigonométrique : $z_1^5 = (\sqrt{2})^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

Forme algébrique : $z_1^5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)(\sqrt{2})^5$

à simplifier

2. $(1+i\sqrt{3})^7$

$|z_2| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+3}$

$= \sqrt{4} = 2$

$\arg(z_2) = \cancel{\frac{\pi}{6}}$ $\frac{\pi}{3}$

$|z_2|^n = (2)^7 = 128$.

$\arg(z_2^n) = 7 \times \frac{\pi}{\cancel{6}\,3} = \frac{7\pi}{\cancel{6}\,3}$.

Forme trigonométrique : $z_2^7 = \left(\cos\left(\frac{7\pi}{\cancel{6}\,3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{\cancel{6}\,3}\right)\right)128$

Forme algébrique : $z_2^7 = \left(\left(\cancel{-}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i \times \left(\cancel{-}+\frac{1}{2}\right)\right)128$

à inverser
puis à simplifier

3. $(2-2i\sqrt{3})^6$

$|z_3| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{4+12}$

$= \sqrt{16} = 4$

$\arg(z_3) = -\frac{\pi}{3}$.

$|z_3|^n = (4)^6 = 4096$

$\arg(z_3^n) = 6 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{6\pi}{3} = -2\pi$.

Forme trigonométrique : $z_3^6 = (\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)).40$

Forme algébrique : $z_3^6 = 1 \times 4096 = 4096$.

Exercice 128 page 216 :

1. $z = \dfrac{i\sqrt{3} - 1}{1 + i}$

$= \dfrac{(i\sqrt{3} - 1)(1 - i)}{(1+i)(1-i)}$

$= \dfrac{(i\sqrt{3} - 1)(1 - i)}{2}$

$= \dfrac{i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3} - 1 + i}{2}$

$= \dfrac{i\sqrt{3} - (-1)\sqrt{3} - 1 + i}{2}$

$= \dfrac{i\sqrt{3} + 1\sqrt{3} - 1 + i}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$

TB

z est un quotient donc

ar $|i\sqrt{3} - 1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$|i\sqrt{3} - 1| = 2$ et $\arg(i\sqrt{3} - 1) = \dfrac{2\pi}{3}$

et $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4}$

D'où $|z| = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$, soit $\sqrt{2}$ et $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$

Donc une F.T est $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)$

2) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$ et $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$

soit $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Voici également ma version avec les correctifs apportés à la version de Lola :

Exercice 126 p 216.

1) on pose : $z = 1 + i$.

on a : $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

puis $\theta = \arg(z)$ donne $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \frac{\pi}{4}$

d'où $|(1+i)^5| = |z^5| = |z|^5 = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$

et $\arg((1+i)^5) = \arg(z^5) = 5\arg(z) = \frac{5\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$

Ainsi : $(1+i)^5 = 4\sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

$= 4\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -4 - 4i$ (⊕ vérification à la calculatrice)

2) on pose : $z = 1 + i\sqrt{3}$, on a : $|z| = 2$

$\arg(z) = \frac{\pi}{3}$

d'où $|(1+i\sqrt{3})^7| = |z^7| = |z|^7 = 128$.

$\arg((1+i\sqrt{3})^7) = 7\arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{3}$ soit $\frac{\pi}{3}$.

Ainsi : $(1+i\sqrt{3})^7 = 128 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 128 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 64 + 64i\sqrt{3}$

3) on pose : $z = 2 - 2i\sqrt{3}$

on a : $|z| = 4$

$\theta = \arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

d'où $(2 - 2i\sqrt{3})^6 = 4096 \times \left(\cos\left(-\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{3}\right)\right)$

$= 4096$

exercice 128 p 216

1) $z = \dfrac{(i\sqrt{3}-1)\times(1-i)}{(1+i)\times(1-i)} = \dfrac{i\sqrt{3}-1-\overset{\to(-1)}{i^2}\sqrt{3}+i}{1^2-i^2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

"technique du conjugué"

(forme algébrique)

$z = \dfrac{z_1}{z_2}$ avec $\begin{cases} z_1 = i\sqrt{3}-1 \\ z_2 = 1+i \end{cases}$

⚠ à l'ordre

$z_1 = i\sqrt{3} - 1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1+i$

$r = |z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

Avec $\theta = \arg(z_1)$

on a : $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

donc $z_1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

$r = |z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Avec $\theta = \arg(z_2)$

on a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

donc $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

En utilisant les "règles du quotient"

- $|z| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\arg(z) = \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$

Ainsi : $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)$ (forme trigo.)

2) En identifiant la forme algébrique et trigonométrique :

$\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$