2) En encadrant d'abord la fonction sous l'intégrale

Méthode : Si on ne sait pas calculer directement $\int_a^b f(x)dx$ mais que pour tout $x \in [a;b]$, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ alors nous pouvons faire :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b h(x)dx$ pour obtenir notre encadrement.

Exercice 95 p 182

95 **1.** Donner un encadrement de la fonction ln sur [1 ; 2].

2. En déduire un encadrement de $\int_1^2 (x^2 \ln x)\,dx$.

Corrigé exercice 95 p 182

exercice 95 p 182.

1) Comme ln est croissante sur $[1;2]$, on a : $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(2)$ pour tout $x \in [1;2]$

d'où $0 \leq \ln(x) \leq \ln(2)$

2) Comme $0 \leq \ln(x) \leq \ln(2)$ pour tout $x \in [1;2]$

on a : $\int_1^2 0\,dx \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq \int_1^2 \ln(2)dx$.

or, $\int_1^2 0\,dx = 0$ et $\int_1^2 \ln(2)dx = \int_1^2 f(x)dx$ avec $f(x) = \ln(2)$

or, $F(x) = \ln(2) \times x$ est une primitive de f sur $[1;2]$

donc $\int_1^2 \ln(2)dx = F(2) - F(1) = 2\ln(2) - \ln(2) = \ln(2)$

Ainsi : $0 \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq \ln(2)$

94 **1. a.** Démontrer que, pour tout réel x de $[0\,;1]$, $e^{-x} \leqslant e^{-x^2}$.

b. En déduire un encadrement de $x\,e^{-x}$ sur $[0\,;1]$.

2. Déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$.

→ Pour vous aider **Savoir-faire 9**, p. 173

Exercice 94 p 182.

1) ⓐ Brouillon : $e^{-x} \le e^{-x^2}$?

$-x \le -x^2$?

$\boxed{x^2 - x \le 0 \text{ ? pour } x \in [0;1]}$

"on transforme notre question en une question équivalente qui sera notre point de départ pour rédiger la réponse".

"on sait y répondre avec Δ c'est donc notre point de départ !"

Réponse : Montrons que : $x^2 - x \le 0$ pour $x \in [0;1]$?

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1 > 0 \rightsquigarrow 2$ solutions.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

↳ donc $x^2 - x \le 0$ pour $x \in [0;1]$

Ensuite, soit $x \in [0;1]$, on a : $x^2 - x \le 0$

donc $-x \le -x^2$

d'où $e^{-x} \le e^{-x^2}$ (car $\exp(.)$ est croissante sur $\mathbb{R}$).

ⓑ Soit $x \in [0;1]$,

on a : $0 \le e^{-x} \le e^{-x^2}$

$0 \times x \le x e^{-x} \le x e^{-x^2}$ (car $x \ge 0$).

d'où $0 \le x e^{-x} \le x e^{-x^2}$

2) Comme $0 \le x e^{-x} \le x e^{-x^2}$, pour tout $x \in [0;1]$

on a : $\int_0^1 0\,dx \le \int_0^1 x e^{-x}\,dx \le \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx$

or, $\int_0^1 0\,dx = 0$ et $\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ avec $f(x) = x e^{-x^2} = -\frac{1}{2} \times (-2x) e^{-x^2} = -\frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$

avec $u(x) = e^{-x^2}$

donc $F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ est une primitive de f sur $[0;1]$

d'où $\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{2} e^{-1} - (-\frac{1}{2} e^0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-1}$

Ainsi : $\boxed{0 \le \int_0^1 x e^{-x}\,dx \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-1}}$