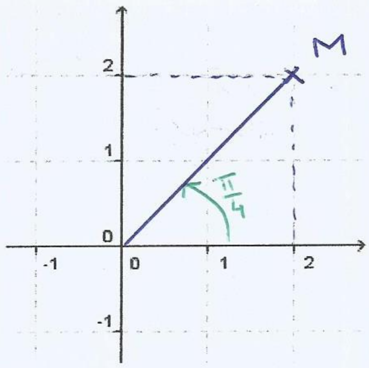
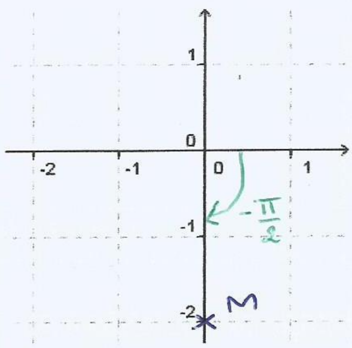
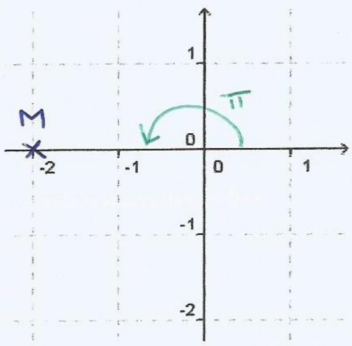
d) Passage de la forme algébrique (F.A) à la forme trigonométrique (F.T)

Nombre complexe z sous sa forme algébrique : $z = a + ib$	Placer le point M d'affixe : z	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$ Calculer $\lvert z\rvert$ et lire graphiquement $\arg(z)$	Trouver l'angle $\theta \in]-\pi\,;\,\pi]$ qui vérifie : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ $\lvert z\rvert$
$z = 2 + 2i$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$		$\lvert z\rvert = \lvert 2+2i\rvert$ $= \sqrt{2^2+2^2}$ $= \sqrt{4+4}$ $= \sqrt{8}$ $= 2\sqrt{2}$ $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$	$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ "d'après le cercle trigonométrique"
$z = -2i$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$		$\lvert z\rvert = \lvert -2i\rvert$ $= \sqrt{0+(-2)^2}$ $= \sqrt{4}$ $= 2$ $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{0}{2} = 0 \\ \sin\theta = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{2}$
$z = -2$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$		$\lvert z\rvert = \lvert -2\rvert$ $= \sqrt{(-2)^2+0^2}$ $= \sqrt{4}$ $= 2$ $\arg(z) = \pi$	$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ \sin\theta = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$ donc $\theta = \pi$

Exercice 115 p 216

Pour les exercices 114 et 115, écrire les nombres complexes sous forme trigonométrique.

115 **1.** $z = 5 + 5i$ **2.** $z = -3 - 3\sqrt{3}i$ **3.** $z = 2\sqrt{3} - 2i$

4. $z = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$ **5.** $z = -3 + 3i$ **6.** $z = -\sqrt{3} + i$

→ Pour vous aider **Savoir-faire 8**, p. 207

Propriété : (Passage F.A à F.T)

Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $z = a + ib$. (F.A)

Si on note : $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

Alors on peut obtenir la forme trigonométrique en suivant dans cet ordre ces 3 étapes :

(1) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

(2) $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{r} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{b}{r} \end{cases}$ ce système nous permet d'en déduire la valeur de θ

(3) $z = r \times (\cos\theta + i\sin\theta)$ (F.T)

Exercice : Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + i$ (F.A) • $r = \|z\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{2}}$ • avec $\theta = \arg(z)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\underline{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ • $\underline{z = \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$ (F.T) "peut être vérifier à la calculatrice en mode RADIAN" on tape (F.T), elle nous renvoie (F.A)	$z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ (F.A) • $r = \|z\| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = \underline{2}$ • avec $\theta = \arg(z)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\underline{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ • $\underline{z = 2 \times \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)}$ (F.T)
$z_3 = -2$ (F.A) • $r = \|z\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \underline{2}$ • avec $\theta = \arg(z)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ \sin\theta = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$ donc $\underline{\theta = \pi}$ • $z = \underline{2 \times (\cos(\pi) + i\sin(\pi))}$ (F.T)	$z_4 = -3 - 3\sqrt{3}i$ (F.A) • $r = \|z\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = \underline{6}$ • avec $\theta = \arg(z)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\underline{\theta = -\dfrac{2\pi}{3}}$ • $\underline{z = 6 \times \left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}$ (F.T)

2) La forme exponentielle

Définition : (Forme Exponentielle : F.E)

On note : $e^{i\theta} =$ $\cos\theta + i\sin\theta$

Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme : $z =$ $re^{i\theta}$

avec $r =$ $|z|$ et $\theta =$ $\arg(z)$

Cette écriture est appelé forme EXPONENTIELLE de z.

Exercice : Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : (F.E => F.T => F.A)

$z_1 = e^{i\pi}$ (F.E) $z_1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$ (F.T) $= (-1) + i \times 0$ $= \underline{\underline{-1}}$ (F.A) "peut être vérifier à la calculatrice" on tape (F.E), elle nous renvoie (F.A)	$z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (F.E) $z_2 = 3 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $= 3 \times (0 + i \times (-1))$ $= \underline{\underline{-3i}}$ (F.A)
$z_3 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ $z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $= -\frac{1}{2} + i \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ $= \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}}$ (F.A)	$z_4 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ (F.E) $z_4 = 2 \times \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ $= \underline{\underline{-\sqrt{3} - i}}$ (F.A)