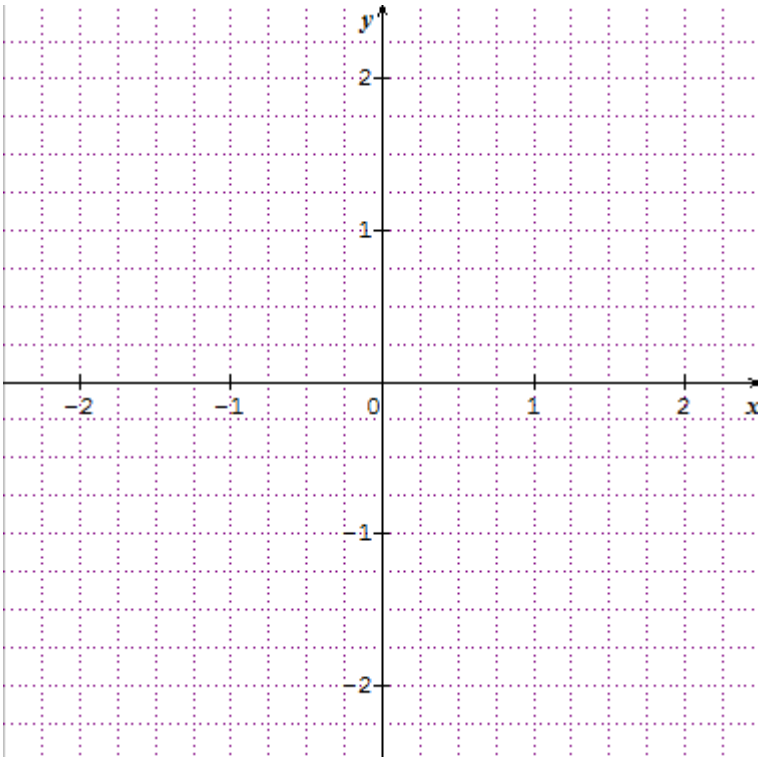
DEVOIR MAISON sur les nombres complexes

Exercice 1 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u} ; \vec{v})$ ci-dessous :



On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_K = i\sqrt{2}$ et $z_L = -\sqrt{2}$.

1) Placer les points A, B, K et L sur la figure précédente.

Vous complèterez la figure au fur et à mesure de l'exercice pour vérifier la cohérence de vos résultats.

2) Montrer que les points A, B, K et L sont sur un même cercle de centre $O(0;0)$ dont on précisera le rayon.

3) Soit M le point du plan d'affixe $Z_M = e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

Montrer que : M est le milieu du segment [KL].

4) Soit C le point du plan de coordonnées $(-1\,;-1)$.

a) Déterminer la forme algébrique du quotient $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$, puis une forme trigonométrique.

b) Interpréter géométriquement le module et un argument de ce nombre complexe Z.

c) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 2:

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   - **a.** Déterminer la forme exponentielle de a.
   - **b.** Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

Exercice 3:

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ de l'annexe
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. **a.** Vérifier que $1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

   b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a. Interpréter géométriquement d_n.

b. Calculer d_0.

c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

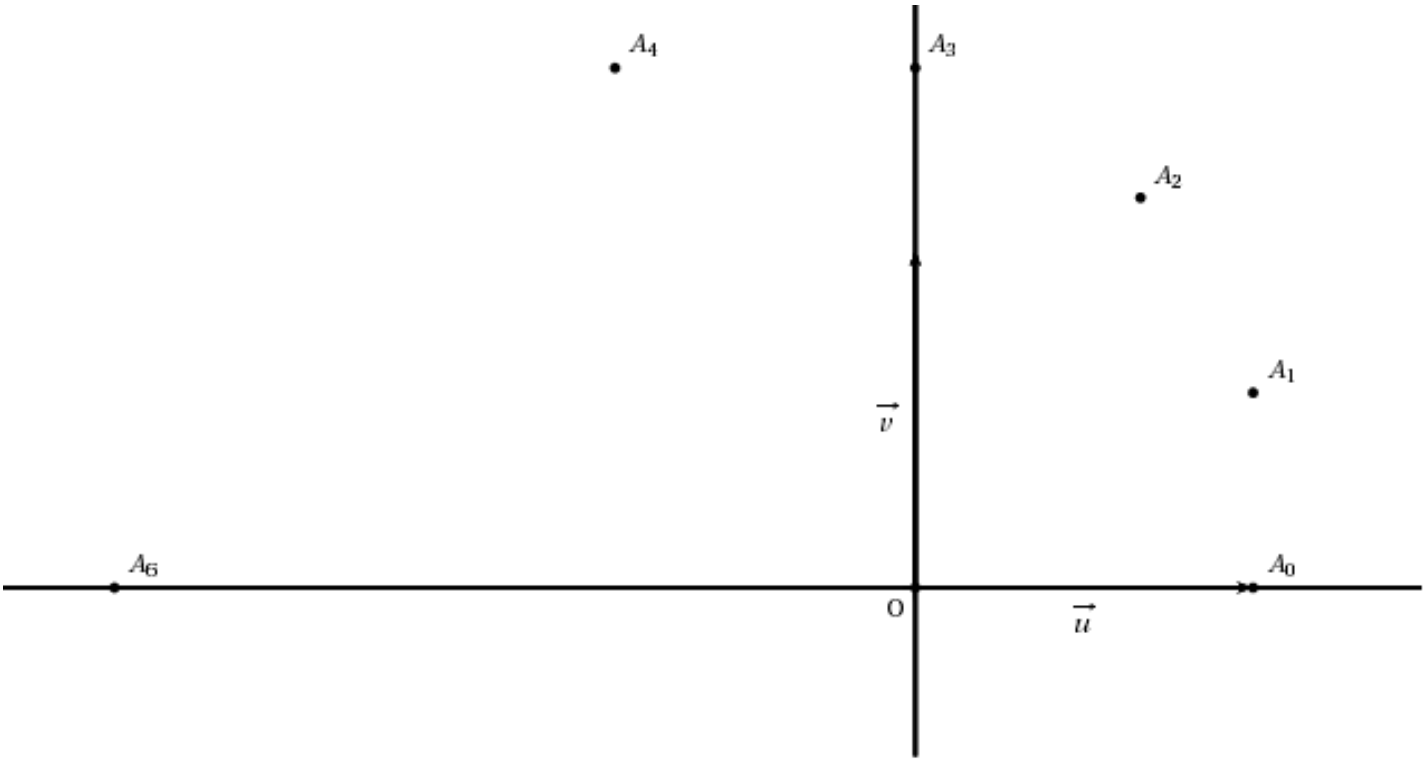
$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. a. On note $Z = \frac{z_{n+1}-z_n}{z_n}$. Déterminer la forme algébrique, puis une forme trigonométrique de Z.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure

Annexe de l'exercice 3 :