Exercice 101 p 250 (Exercice type à lire et comprendre avec son corrigé)

101 On considère les points A (1 ; 2 ; 3), B (3 ; 2 ; 6), C (1 ; 4 ; 2) et D (−1 ; 4 ; −1).
Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Solution :

exercice 101 p 250

A, B, C et D sont coplanaires
ssi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, et $\vec{AD}$ sont coplanaires

or, $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$

puis $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires
donc on cherche α et β réels tels que :

$\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

cela donne $\begin{cases} -2 = 2\alpha \\ 2 = 2\beta \\ -4 = 3\alpha - \beta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = +1 \end{cases}$

d'où $\vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AC}$
donc $\vec{AD} + \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{0}$
ainsi : $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires
donc A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 102 p 250 (à faire puis auto-correction pour voir si le précédent a été compris)

102 On considère les points A (−4 ; 5 ; −1), B (−1 ; 5 ; −4), C (−2 ; 12 ; 4) et D (4 ; 12 ; −2).
Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Correction de l'exercice 102 p 250

exercice 102 p 250.

A, B, C et D sont coplanaires

ssi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires

or, $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}8\\7\\-1\end{pmatrix}$

puis $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

donc on cherche α et β réels tels que

$\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

cela donne $\begin{cases} 8 = 3\alpha + 2\beta \\ 7 = 7\beta \\ -1 = -3\alpha + 5\beta \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$

donc $\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$

d'où $\vec{AD} - 2\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{0}$

Ainsi : $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires

et A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 108 p 251 (Exercice type à lire et comprendre avec son corrigé)

exercice 108 p 251

1) Soit a, b et c réels tels que :
$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Alors $\begin{cases} a + 0 + 2c = 0 \\ a + b + 3c = 0 \\ 0 + b + 4c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2c = 0 \\ a + b + 3c = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -2c \\ -2c - 4c + 3c = 0 \\ b = -4c \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2c \\ -3c = 0 \\ b = -4c \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

donc $a = b = c = 0$

ainsi : les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

2) On cherche α, β et γ tels que :
$\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

donc $\begin{cases} 4 = \alpha + 2\gamma \\ 2 = \alpha + \beta + 3\gamma \\ 1 = \beta + 4\gamma \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = 4 - 2\gamma \\ 4 - 2\gamma + 1 - 4\gamma + 3\gamma = 2 \\ \beta = 1 - 4\gamma \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = 4 - 2\gamma \\ -3\gamma = -3 \\ \beta = 1 - 4\gamma \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \gamma = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$

d'où $\vec{t} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$.

Exercice 109 p 251 (à faire puis auto-correction pour voir si le précédent a été compris)

109 Soit les vecteurs $\vec{u}(-2;3;1)$, $\vec{v}(1;0;3)$ et $\vec{w}(1;2;-1)$.

1. Démontrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer l'expression de $\vec{t}\,(1;7;2)$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Correction de l'exercice 109 p 251

exercice 109 p 251.

1) Soit a, b et c réels tels que :

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$

Alors $\begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ 3a + 2c = 0 \\ a + 3b - c = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2a + b + (a + 3b) = 0 \\ 3a + 2\times(a + 3b) = 0 \\ c = a + 3b \end{cases}$

$\begin{cases} -a + 4b = 0 \\ 5a + 6b = 0 \\ c = a + 3b \end{cases}$ $\begin{cases} a = 4b \\ 5\times(4b) + 6b = 0 \\ c = a + 3b \end{cases}$

$\begin{cases} a = 4b \\ 26b = 0 \\ c = a + 3b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

d'où $a = b = c = 0$

ainsi : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

2) on cherche α, β et γ tels que :

$\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

donc $\begin{cases} 1 = -2\alpha + \beta + \gamma \\ 7 = 3\alpha + 2\gamma \\ 2 = \alpha + 3\beta - \gamma \end{cases}$

$\begin{cases} 1 = -2\alpha + \beta + (\alpha + 3\beta - 2) \\ 7 = 3\alpha + 2\times(\alpha + 3\beta - 2) \\ \gamma = \alpha + 3\beta - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -\alpha + 4\beta = 3 \\ 5\alpha + 6\beta = 11 \\ \gamma = \alpha + 3\beta - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 4\beta - 3 \\ 5\times(4\beta - 3) + 6\beta = 11 \\ \gamma = \alpha + 3\beta - 2. \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = 4\beta - 3 \\ 26\beta = 26 \\ \gamma = \alpha + 3\beta - 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 4\times 1 - 3 = \underline{\underline{1}} \\ \beta = \underline{\underline{1}} \\ \gamma = 1 + 3\times 1 - 2 = \underline{\underline{2}} \end{cases}$

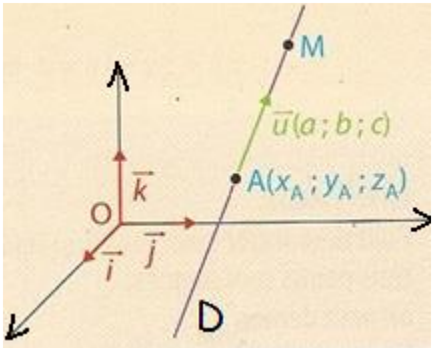
d'où $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$.

III] Système d'équations paramétriques

1) *Représentation paramétrique d'une droite*

Propriété:
Soit D la droite passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$
et de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;b\,;c)$.
Alors un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient à D, si

et seulement si, il existe un réel t tel que :



Démonstration :

☐ Soit $(x;y;z)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées (; ;).

or $M \in D$, si et seulement si, il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} =$………

donc, si et seulement si, il existe un réel t tel que :

si et seulement si, il existe un réel t tel que : ☐

Propriété: Soit x_0 , y_0 , z_0 des réels et a , b , c d'autres réels tels que $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.

Alors le système d'équations : , avec $\in \mathbb{R}$, définit **UNE** …………………………………………………

de la droite D passant par le point $A($; ; $)$ et de vecteur directeur $\vec{u}($; ; $)$.

Le réel t s'appelle le ……………………………… du point M.

Exemple : Soit $A(1;2;3)$ et $(4;4;1)$, alors :

Le système est une représentation paramétrique de la droite (AB).

Le système est une autre représentation paramétrique de la droite (AB).

Remarque : ………

………

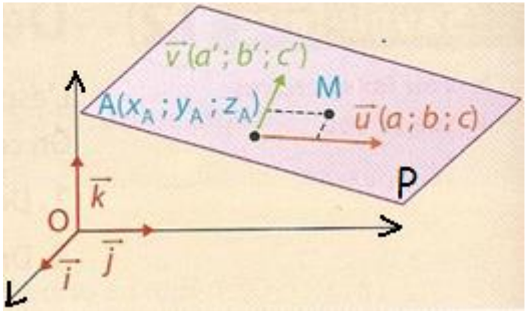
………

………

2) *Représentation paramétrique d'un plan*

Propriété:
Soit P le plan passant par le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a\ ;b\ ;c)$ et $\vec{v}(a'\ ;b'\ ;c')$.
Alors un point M de coordonnées $(x\ ;y\ ;z)$ appartient à P,

SSI, il existe deux réels t et t' tel que : $\left\{ \right.$



Démonstration :

☐ Soit $(x; y; z)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées (;   ;   ).

or $M \in P$, si et seulement si, il existe deux réel t et t' tels que : $\overrightarrow{AM} =$……………………………………

donc, si et seulement si, il existe deux réel t et t' tel que : $\left\{ \right.$

si et seulement si, il existe deux réel t et t' tel que : $\left\{ \right.$ ☐

Propriété: Soit x_0 , y_0 , z_0 des réels a , b , c et a' , b' , c' d'autres réels tels que les vecteurs de coordonnées $(a\ ;b\ ;c)$ et $(a'\ ;b'\ ;c')$ ne soient **pas colinéaires**.

Alors le système d'équations : $\left\{ \right.$, avec t et t' réels , définit **UNE** ………………………………………

……………………………………………… du plan P passant par le point $A($;   ; $)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}($;   ; $)$ et $\vec{v}($;   ; $)$.

Les réels t et t' s'appellent les …………………………………………… du point M.

Exercice : Soit $(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$ et $C(4; 5; 6)$.

1) Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

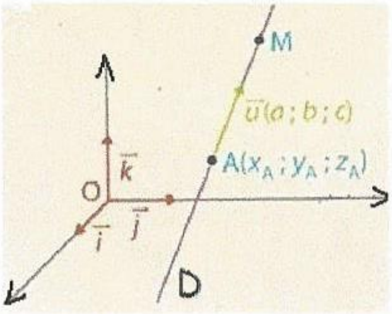
2) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

Cours complété :

III] Système d'équations paramétriques

1) *Représentation paramétrique d'une droite*

Propriété:
Soit D la droite passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;b\,;c)$.
Alors un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient à D, si



et seulement si, il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$

Démonstration :

□ Soit $M(x;y;z)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A\,;\,y - y_A\,;\,z - z_A)$.
Donc $M \in D$, si et seulement si, il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

si et seulement si, il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$

si et seulement si, il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ □

Propriété: Soit x_0 , y_0 , z_0 des réels et a , b , c d'autres réels tels que $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.
Alors le système d'équations : $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$, définit **UNE** représentation paramétrique
de la droite D passant par le point $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;b\,;c)$.
Le réel t s'appelle le paramètre du point M.

Exemple : Soit $A(1;2;3)$ et $B(4;4;1)$, alors :

Le système $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (AB).

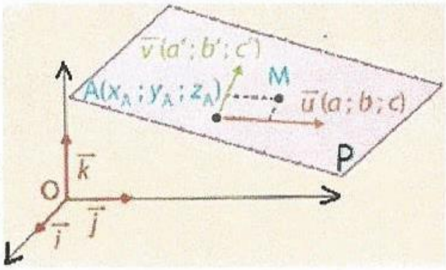
Le système $\begin{cases} x = 4 + 6 \\ y = 4 + 4t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une autre représentation paramétrique de la droite (AB).

Remarque : Une droite n'admet pas une unique représentation paramétrique puisque l'on peut choisir n'importe quel point et n'importe quel vecteur directeur de cette droite pour former le système.

2) Représentation paramétrique d'un plan

Propriété:
Soit P le plan passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ et $\vec{v}(a'\,;b'\,;c')$.
Alors un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient à P,

SSI, il existe deux réels t et t' tel que : $\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$



Démonstration :

□ Soit $M(x;y;z)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A\ ;\ y - y_A\ ;\ z - z_A)$.
Donc $M \in P$, si et seulement si, il existe deux réel t et t' tels que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$

si et seulement si, il existe deux réel t et t' tel que : $\begin{cases} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \\ z - z_A = tc + t'c' \end{cases}$

si et seulement si, il existe deux réel t et t' tel que : $\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$ □

Propriété: Soit x_0 , y_0 , z_0 des réels a , b , c et a' , b' , c' d'autres réels tels que les vecteurs de coordonnées $(a\,;b\,;c)$ et $(a'\,;b'\,;c')$ ne soient **pas colinéaires**.
Alors le système d'équations : $\begin{cases} x = x_0 + ta + t'a' \\ y = y_0 + tb + t'b' \\ z = z_0 + tc + t'c' \end{cases}$ avec t et t' réels , définit **UNE** représentation paramétrique du plan P passant par le point $A(x_0\ ;y_0\ ;z_0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $\vec{v}(a'\ ;b'\ ;c')$.
Les réels t et t' s'appellent les paramètres du point M.

Exercice : Soit $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$ et $C(4;5;6)$.

1) Justifier que les points A, B et C définissent un plan. il faut (Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc A, B et C ne sont pas alignés. $\hookrightarrow \left(\frac{3}{1} \neq \frac{4}{2} \left(\neq \frac{5}{3}\right)\right)$
Ainsi : A, B et C définissent un plan.

2) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

(ABC) passe par le point $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} x = 1 + t + 3t' \\ y = 1 + 2t + 4t' \\ z = 1 + 3t + 5t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan (ABC)

Faire Exercices 125, 126, 127 et 128 p 252 (VRAI-FAUX à justifier pour jeudi 09/04)

VRAI – FAUX

Pour les exercices **125** à **128**, indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 1 + 4k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 6k \end{cases}$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + t + t' \\ y = 1 + t - t' \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + t \end{cases}$$

125 La droite (d) passe par le point A $(2\,;4\,;-6)$.

126 $\vec{u}(1\,;2\,;-3)$ est un vecteur directeur de (d).

127 $\mathcal{P}$ est dirigé par les vecteurs $\vec{v}(1\,;1\,;1)$ et $\vec{w}(1\,;-1\,;0)$.

128 $\mathcal{P}$ et (d) sont sécants en B $(4\,;1\,;1)$.