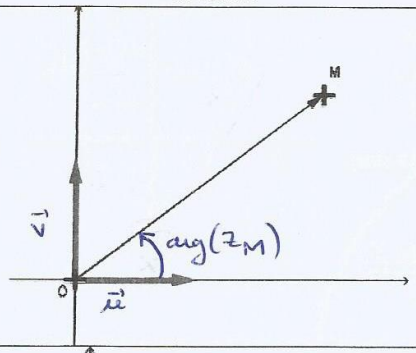
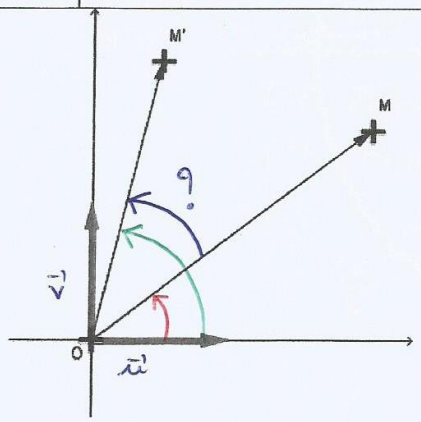
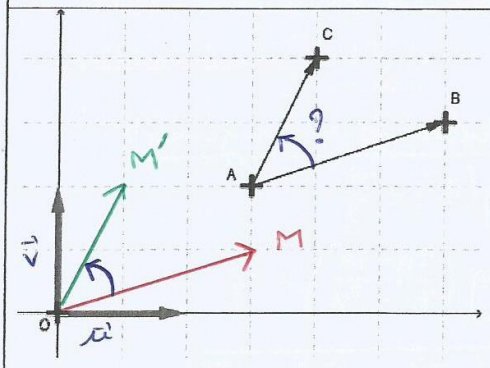
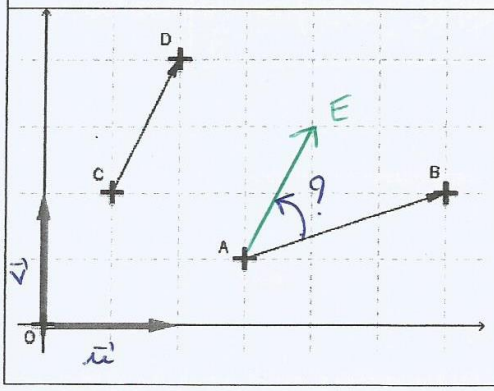
IV] Calculs d'un angle orienté grâce aux arguments

1) Activité (Le but de cette activité est d'apprendre à calculer un angle orienté entre 2 vecteurs quelconque du plan en partant de la définition d'un argument)

Représentation géométrique de l'angle orienté	Calcul de l'angle orienté à l'aide des arguments
	$(\vec{u};\vec{OM}) = \arg(z_M)$ ① (d'après la définition d'un argument)
	$(\vec{OM};\vec{OM'})$ $= (\vec{u};\vec{OM'}) - (\vec{u};\vec{OM})$ $= \arg(z_{M'}) - \arg(z_M)$ (d'après ①) $= \arg\left(\frac{z_{M'}}{z_M}\right)$ ② (d'après règle sur les arguments).
	$(\vec{AB};\vec{AC})$ $= (\vec{OM};\vec{OM'})$ avec $\begin{cases} M \text{ tel que } \vec{OM} = \vec{AB} \\ M' \text{ tel que } \vec{OM'} = \vec{AC} \end{cases}$ $= \arg\left(\frac{z_{M'}}{z_M}\right)$ (d'après ②) $= \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ ③ $z_M = z_B - z_A$; $z_{M'} = z_C - z_A$
	$(\vec{AB};\vec{CD})$ $= (\vec{AB};\vec{AE})$ avec E tel que : $\vec{AE} = \vec{CD}$ $= \arg\left(\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}\right)$ (d'après ③) $= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ $z_E - z_A = z_D - z_C$

↳ " formule que l'on retiendra pour la suite du cours "

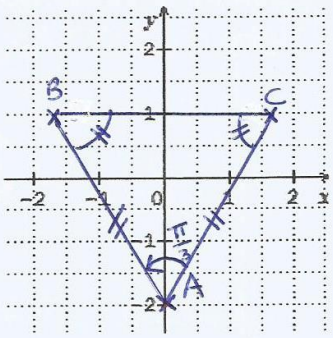
2) Propriété

Propriété : Soit A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$, alors on a : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ (*)

3) Exercice d'application

Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = -2i \qquad z_B = -\sqrt{3} + i \qquad z_C = \sqrt{3} + i$$



1) Placer les points A, B et C dans le repère ci-contre.
2) Déterminer la forme algébrique du quotient $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis une forme trigonométrique.
3) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.
4) En déduire la nature du triangle ABC.

Solution :

1) Voir figure

2) "technique du conjugué"

$$Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-\sqrt{3}+i)-(-2i)}{(\sqrt{3}+i)-(-2i)} = \frac{(-\sqrt{3}+3i)\times(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)\times(\sqrt{3}-3i)}$$

$$= \frac{-3+3\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i-9i^2}{(\sqrt{3})^2-(3i)^2} = \frac{-3+6\sqrt{3}i+9}{3+9} = \frac{6+6\sqrt{3}i}{12}$$

$$= \frac{6}{12} + \frac{6\sqrt{3}}{12}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (F.A)$$

puis $r = |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

avec $\theta = \arg(Z)$ on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$

d'où $Z = 1\times\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (F.T).

3) **Interprétation du module.**

$|Z| = 1$ (= distance)

donc $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ "règle sur les modules"

d'où $\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1$ "définition de la distance avec les modules"

$\frac{AB}{AC} = 1$ "$\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$"

Ainsi : $\boxed{AB = AC}$

Interprétation d'un argument :

$\arg(Z) = \frac{\pi}{3}$ (= angle orienté)

donc $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$ propriété (*)

d'où $\boxed{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}}$

4) • Comme $AB = AC$, on a ABC qui est isocèle en A.

• De plus, $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$ soit $\hat{A} = 60°$.

or, la somme des angles d'un triangle est égale à 180°

donc $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$ et $\hat{B} = \hat{C}$ (car ABC est isocèle en A)

d'où $60 + 2\hat{B} = 180$

$2\hat{B} = 180 - 60$

$2\hat{B} = 120$ donc $\hat{B} = 60$, d'où $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} (= 60°)$

Ainsi : ABC est équilatéral.

Exercice 150 p 217

150 Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

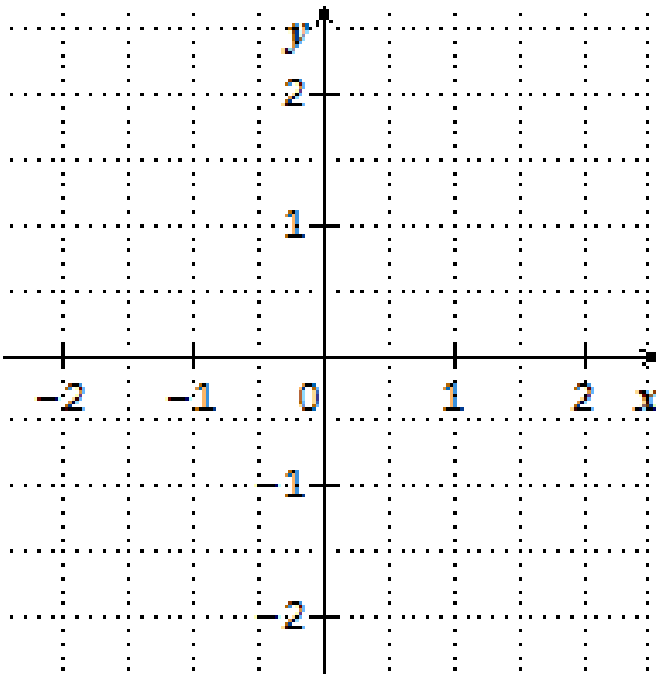
$$z_A = -1 + i\sqrt{3} \ ; \ z_B = -1 - i\sqrt{3} \ ; \ z_C = 2.$$

1. a. Déterminer la forme algébrique du quotient $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ puis une forme trigonométrique.

b. Interpréter géométriquement le module et un argument de ce complexe.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

Remarque : Ne pas hésiter à faire une figure pour vérifier ses résultats même quand cela n'est pas demandé.



Exercice 154 p 218

154 Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

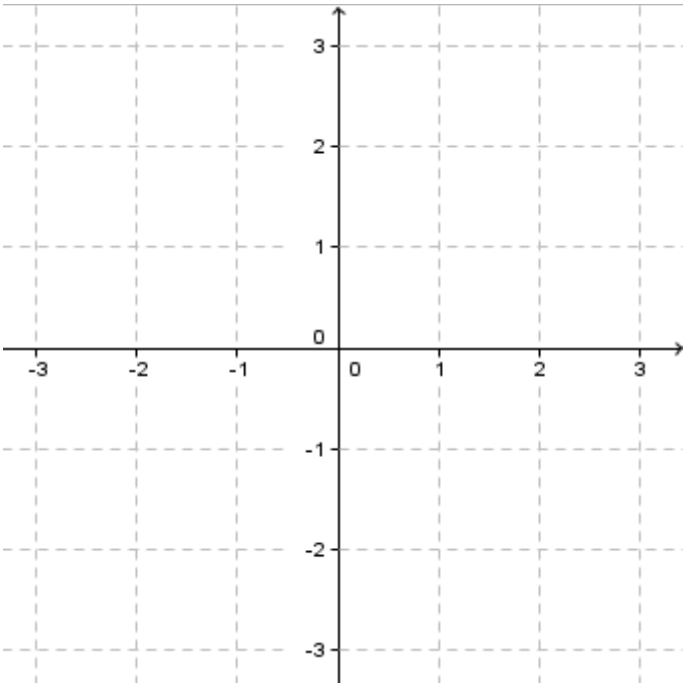
$$z_A = -i \ ; \ z_B = 3 \ ; \ z_C = 2 + 3i \ ; \ z_D = -1 + 2i.$$

1. a. Déterminer la forme algébrique du quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

b. Interpréter géométriquement le module et un argument de ce complexe.

c. Que peut-on en déduire concernant les segments [AC] et [BD] ?

2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

3. Calculer l'aire du quadrilatère ABCD.

Remarque : Ne pas hésiter à faire une figure pour vérifier ses résultats même quand cela n'est pas demandé.