III] Propriétés sur les modules et les arguments

1) Propriété de symétrie

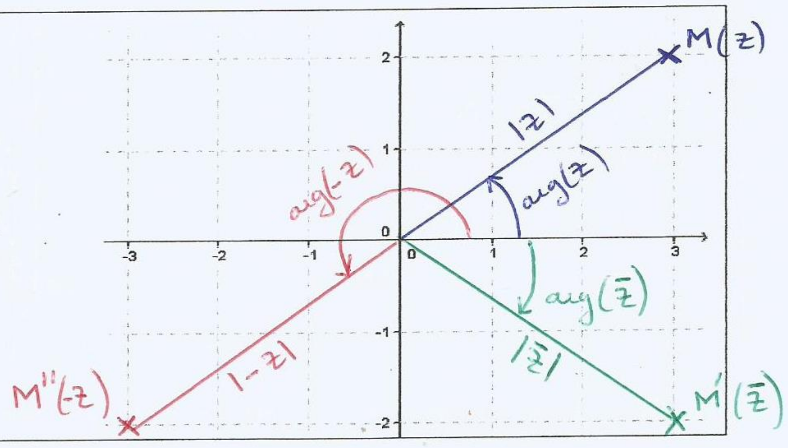
Propriété :

(1) $|\bar{z}| = |z|$

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

(2) $|-z| = |z|$

$\arg(-z) = \arg(z) + \pi$



2) Propriété d'opérations

Soit z de module $r = |z|$ et d'argument $\theta = \arg(z)$.
Soit z' de module $r' = |z'|$ et d'argument $\theta' = \arg(z')$.
Alors on a : $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

- **Règle du produit** :

$|z|\times|z'|$ $\quad$ $\arg(z)+\arg(z')$

$$z\times z' = re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta+i\theta'} = \underbrace{rr'}_{|z\times z'|}e^{i\overbrace{(\theta+\theta')}^{\arg(z\times z')}} \quad (F.E)$$

Propriété : $|z\times z'| = |z|\times|z'|$ et $\arg(z\times z') = \arg(z)+\arg(z')$

- **Règle du quotient** :

$\frac{|z|}{|z'|}$ $\quad$ $\arg(z)-\arg(z')$

$$\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\times\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\times e^{i\theta-i\theta'} = \underbrace{\frac{r}{r'}}_{\left|\frac{z}{z'}\right|}e^{i\overbrace{(\theta-\theta')}^{\arg\left(\frac{z}{z'}\right)}}$$

Propriété : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z)-\arg(z')$

- **Règle de la puissance** :

$|z|^n$ $\quad$ $n\times\arg(z)$

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n\times\left(e^{i\theta}\right)^n = r^n\times e^{i\theta\times n} = \underbrace{r^n}_{|z^n|}e^{i\overbrace{n\theta}^{\arg(z^n)}}$$

Propriété : $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\times\arg(z)$

rem : on peut retenir que arg(.) a les mêmes propriétés que ln(.)

- **Règle de la somme** :

Propriété : (inégalité triangulaire)

$$\boxed{|z+z'| \leq |z|+|z'|}$$

exemple : (illustré ci-contre)

$z = 3+i$ et $z' = 1+2i$ donc $z+z' = 4+3i$

on a alors :

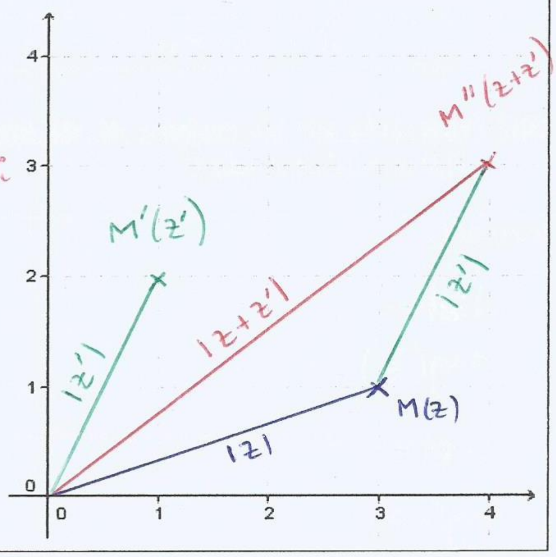
$|z| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$|z'| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$|z+z'| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$.

or, $5 < \sqrt{10}+\sqrt{5}$.

donc $|z+z'| < |z|+|z'|$



Remarque : Cas d'égalité uniquement si M, M' et M'' sont alignés.

Lire et comprendre le savoir-faire suivant (avant de faire les exercices 126 et 128 p 216

Savoir-faire 9 Utiliser les propriétés sur les modules et les arguments

➤ Voir les exercices 126 et 128

1. On considère $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la forme algébrique de $z^{2\,012}$.

2. a. Déterminer la forme algébrique, puis une forme trigonométrique de $Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$.

b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Méthode

Pour déterminer la forme algébrique de z^n, on peut commencer par déterminer une forme trigonométrique de z^n.

Solution

1. $|z| = 1$ et $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

Or $|z^{2\,012}| = |z|^{2\,012}$ et $\arg(z^{2\,012}) = 2\,012 \arg z$, donc $|z^{2\,012}| = 1$ et $\arg(z^{2\,012}) = \frac{2012\pi}{3}$.

D'où $\arg(z^{2\,012}) = \frac{2\pi}{3}$, car $\frac{2012\pi}{3} = \frac{335\times 6\pi + 2\pi}{3} = 335 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$.

Une forme trigonométrique de $z^{2\,012}$ est donc $z^{2012} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

On en déduit sa forme algébrique : $z^{2\,012} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. a. $Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2}$, donc la forme algébrique de Z est $Z = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Z est un quotient. Or le module d'un quotient est le quotient des modules et l'argument d'un quotient est la différence des arguments.

$|\sqrt{3}-i| = 2$ et $\arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$; $|1-i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$.

D'où $|Z| = \frac{2}{\sqrt{2}}$, soit $\sqrt{2}$, et $\arg Z = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$, soit $\frac{\pi}{12}$.

Une forme trigonométrique de Z est donc $Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

b. On identifie les parties réelles et imaginaires des deux écritures de Z et on obtient :

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

soit $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Faire les exercices 126 et 128 p 216 pour lundi 23 Mars

Pour les exercices 126 et 127, calculer le module et un argument de chacun des complexes, écrire ces complexes sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

126 1. $(1+i)^5$ 2. $(1+i\sqrt{3})^7$ 3. $(2-2i\sqrt{3})^6$

→ Pour vous aider Savoir-faire 9, p. 207

128 1. Déterminer la forme algébrique, puis la forme trigonométrique de $Z = \frac{i\sqrt{3}-1}{1+i}$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

→ Pour vous aider Savoir-faire 9, p. 207