

Correction des Ex n° 6 et Ex n° 9 de la feuille d'Ex PS Théorèmes fondamentaux

Ex n° 6 : a)  $7x = 11y$

7 divise donc  $11y$   
 or 11 et 7 sont premiers entre eux ( $\text{PGCD}(11, 7) = 1$ )  
 diviseurs positifs de 11 : ①, 11  
 diviseurs positifs de 7 : ①, 7

donc d'après le th de Gauss  
 7 divise  $y$   
 donc il existe un entier  $k$   
 tel que  $y = 7k$   
 par substitution

$$7x = 11 \times 7k$$

$$x = 11k$$

Réciproquement: si  $x = 11k$   
 et  $y = 7k$  alors  $7x - 11y = 7 \times 11k - 11 \times 7k = 0$   
 donc  $7x = 11y$

Conclusion: les solutions de l'équation sont tous les couples de la forme  $(11k; 7k)$  où  $k$  entier

b) (E):  $7x - 11y = 3$ :

existence de solut: 7 et 11 sont premiers entre eux donc d'après le th de Bezout, il existe 2 entiers  $u$  et  $v$  tels que  $7u + 11v = 1$

$$\text{donc } 7u - 11(-v) = 1$$

$$7(3u) - 11(-3v) = 3 \quad \downarrow \times 3$$

donc  $(3u; -3v)$  est un couple solution de (E)

• solution particulière  $(x_0; y_0)$  de E ?

si  $x_0 = 13$   
 et  $y_0 = 8$

alors  $7x_0 - 11y_0 = 7 \times 13 - 11 \times 8 = 91 - 88 = 3$   
 donc  $(x_0, y_0) = (13; 8)$  est une solution particulière de E

c) Système

$$\begin{cases} 7x - 11y = 3 \\ 7x_0 - 11y_0 = 3 \end{cases}$$

donc  $7x - 11y = 7x_0 - 11y_0$

$$7x - 7x_0 = 11y - 11y_0$$

$$7(x - x_0) = 11(y - y_0)$$

7 divise  $11(y - y_0)$   
 or 7 et 11 sont premiers entre eux

donc d'après le th de Gauss

7 divise  $y - y_0$

donc il existe un entier  $k$  tel que

$$y - y_0 = 7k$$

$$y = y_0 + 7k$$

$$y = 8 + 7k$$

par substitution

$$7(x - x_0) = 11 \times 7k$$

$$x - x_0 = 11k$$

$$x = x_0 + 11k$$

$$x = 13 + 11k$$

Réciproquement: si  $x = 13 + 11k$   
 et  $y = 8 + 7k$  } alors  $7x - 11y = 7(13 + 11k) - 11(8 + 7k)$   
 $= 91 + 77k - 88 - 77k$   
 $= 3$

donc les solutions de (E) sont tous les couples de la forme  $(13 + 11k; 8 + 7k)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

$E \propto m^0 9$

(2)

1)  $a = 14m + 3$   
 $b = 5m + 1$

donc  $5a - 14b = 5(14m + 3) - 14(5m + 1)$   
 $= 70m + 15 - 70m - 14$   
 $= 1$

donc, il existe 2 entiers  
 $u = 5$  et  $v = -14$  tel que  $ua + vb = 1$  et d'après le th  
de Bézout,  $a = 14m + 3$  et  $b = 5m + 1$  sont premiers entre eux

2) (E):  $87x + 31y = 2$

a)  $87 = 14m + 3$  avec  $m = 6$  donc d'après 1)  $87$  et  $31$  sont  
 $31 = 5m + 1$  premiers entre eux

d'après Bézout, il existe donc 2 entiers  $u$  et  $v$  tels que  
 $87u + 31v = 1$

si  $u = 5$  et  $v = -14$  on a  $87u + 31v = 87 \times 5 + 31 \times (-14) =$   
 $= 435 - 434 = 1$

donc  $(u, v) = (5, -14)$  et  $87u + 31v = 1$   
 $87(2u) + 31(2v) = 2$   $\times 2$

si  $x_0 = 2u = 2 \times 5 = 10$  et  $y_0 = 2v = 2 \times (-14) = -28$  alors  $87x_0 + 31y_0 = 2$

donc  $(x_0, y_0) = (10, -28)$  est une solution  
particulière de (E)

$\begin{cases} 87x + 31y = 2 \\ 87x_0 + 31y_0 = 2 \end{cases}$

donc  $87x + 31y = 87x_0 + 31y_0$   
 $87x - 87x_0 = 31y_0 - 31y$   
 $87(x - x_0) = 31(y_0 - y)$

$87$  divise  $31(y_0 - y)$   
or  $87$  et  $31$  sont premiers  
entre eux

donc d'après le th de Gauss  
 $87$  divise  $y_0 - y$   
donc il existe un entier  $k$   
tel que  $y_0 - y = 87k$

$y_0 - 87k = y$

$y = -28 - 87k$

par substitution

$87(x - x_0) = 31 \times 87k$

$x - x_0 = 31k$

$x = x_0 + 31k$

$x = 10 + 31k$

Réciproquement

si  $x = 10 + 31k$   
et  $y = -28 - 87k$

alors  $87x + 31y = 87(10 + 31k) + 31(-28 - 87k)$   
 $= 870 + 2697k - 868 - 2697k$   
 $= 2$

les solutions de (E) sont tous les couples de la forme  $(10 + 31k, -28 - 87k)$   
 $k \in \mathbb{Z}$

c)  $\pi(x, y) \in (\mathbb{D})$  (m)  $87x - 31y = 2$

(m)  $87x + 31(-y) = 2$

(m)  $(x, -y)$  solution de (E)

(m)  $\begin{cases} x = 10 + 31k \\ -y = -28 - 87k \end{cases}$

$\begin{cases} x = 10 + 31k \\ y = 28 + 87k \end{cases}$

$k \in \mathbb{Z}$

les points de (D) dont les coordonnées sont des entiers naturels  
sont les points de coordonnées  $(10+31k; 28+87k)$  avec  $k \in \mathbb{N}$   
de plus l'abscisse est comprise entre 0 et 100 d'où  
 $x = 10 + 31k$  et  $0 \leq x \leq 100$

$$0 \leq 10 + 31k \leq 100$$

$$0 - 10 \leq 31k \leq 100 - 10$$

$$\boxed{-\frac{10}{31} \leq k \leq \frac{90}{31}} \quad \text{et } k \text{ entier}$$

$k$  est un entier compris entre  $-\frac{10}{31} \approx -0,32$  et  $\frac{90}{31} \approx 2,9$   
donc les valeurs possibles de  $k$  sont :

$\underline{k=0}$	$\underline{k=1}$	$\underline{k=2}$
$x = 10 + 31k = 10$	$x = 10 + 31k = 41$	$x = 10 + 31k = 72$
$y = 28 + 87k = 28$	$y = 28 + 87k = 115$	$y = 28 + 87k = 202$

Les points cherchés ont pour coordonnées :

- $(10; 28)$
- $(41; 115)$
- $(72; 202)$