Chapitre 3 **PGCD de 2 entiers – Nombres entiers premiers entre eux** Feuille n° 1

I] Diviseurs communs à 2 entiers naturels :

1) Définition :

Soient a et b 2 entiers naturels non nuls

L'ensemble des diviseurs communs à 2 entiers a et b n'est pas vide car il contient au moins l'entier 1.

Le Plus Grand Diviseur (positif) Commun de a et b est appelé ...le p.g.c.d de a et b

Il est noté ...PGCD(a, b)

Exemple : Quel est le PGCD de 12 et 18 ?

les diviseurs positifs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 | les diviseurs positifs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18 | les diviseurs communs à 12 et à 18 sont 1, 2, 3, 6

et $\boxed{PGCD(12,18) = 6}$

2) Méthode 1 pour déterminer le PGCD :

On utilise la propriété suivante :

Soient 2 entiers a et b supérieurs ou égaux à 2

- Si dans leur décomposition en produit de facteurs premiers , a et b n'ont pas de facteur premier commun alors PGCD (a, b) = .1.
- Sinon , le PGCD de a et b est égal au ...produit des facteurs premiers communs de a et de b , chacun d'eux étant affecté du plus petit exposant figurant dans la décomposition de a et de b

Exemple : Déterminer le PGCD de 360 et 9450 après avoir décomposé ces 2 nombres en facteurs premiers.

décomposition en facteurs premiers

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^0$

$9450 = 2^1 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^1$

donc en prenant le plus petit exposant de 2 ; 3, 5 et 7

on a $PGCD(360, 9450) = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^0 = 90$

9450	2
4725	3
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

3) Propriétés :

Pour tous a et b entiers relatifs non tous deux nuls

a) PGCD (a, b) est un **entier strictement positif**

b) PGCD (a , 1) = .1..

c) PGCD (a , 0) = .|a|. (valeur absolue de a)

d) PGCD (a, a) = .|a|

e) PGCD (b , a) = PGCD (..a,..b....) = PGCD (.|a|, |b|...)

f) Pour tout entier relatif k non nul , PGCD (ka , kb) = ...|k| PGCD (a , b)

g) Si k divise à la fois a et b , alors PGCD (a / k ; b / k) = ...$\frac{1}{|k|}$.... PGCD (a, b)

Exemple : n est un entier naturel non nul . Si le PGCD de n et 8 est 4 , déterminer le PGCD de n² et 8n , celui de 5n et 40

$PGCD(n^2, 8n) = PGCD(n \times n, 8 \times n) = |n| \, PGCD(n, 8) = |n| \times 4 = 4n$ car $n > 0$, $|n| = n$

$PGCD(5n, 40) = PGCD(5 \times n, 5 \times 8) = 5 \, PGCD(n, 8) = 5 \times 4 = 20$

4) Théorème :

*** Si d est le PGCD de a et b alors d divise** ..a..et....b

* **Réciproquement** **si d est un diviseur commun de a et b alors d divise** ....le PGCD de a et b

5) Nombres premiers entre eux :

a) Définition :

Deux nombres entiers relatifs non simultanément nuls sont **premiers entre eux** si et seulement si leur **PGCD est égal à .1.** (en effet leurs seuls diviseurs communs sont 1 et –1 ou ils n'ont aucun facteur premier commun

b) **Corollaire :**

Si a et b sont 2 entiers non nuls et d un entier naturel

d = PGCD (a , b) ssi a = d a' et b = d b' où a' et b' sont premiers entre eux c'est-à-dire PGCD (a', b') = 1

Démonstration :

d = PGCD (a b) alors d divise a et b donc il existe 2 entiers a' et b' tels que a = d a'
b = d b'

et PGCD(a, b) = PGCD(d a', d b') = |d| PGCD(a', b') or d = PGCD(a, b) donc positif |d| = d

d = d PGCD(a', b') donc $\boxed{PGCD(a', b') = 1}$

Feuille n°2

c) Fraction irréductible :

Lorsque **a et b** (b non nul) sont **premiers entre eux .** On dit que la fraction **a / b** est **irréductible .**

Remarque : Pour rendre irréductible 1 fraction, on la simplifie par $d = PGcd(a, b)$ donc $a = d a'$ et $b = d b'$ où a', b' premiers entre eux, donc $\frac{a}{b} = \frac{a'd}{b'd} = \frac{a'}{b'}$, où a', b' premiers entre eux $PGCD(a', b') = 1$

6) Algorithme d' Euclide : Recherche pratique du PGCD

Il repose sur 2 principes :

a) **Principe 1 :** (lemme d' Euclide)

Soient a , b , q et r 4 entiers relatifs avec b non nul

Si a = bq + r alors les diviseurs communs à a et b sont les mêmes que les diviseurs communs à b et r et PGCD (a, b) = PGCD (b , r). d divise a et b $\Leftrightarrow$ d divise b et r

Remarque r n'est pas forcément le reste

Montrons l'équivalence :

Démonstration : ($\Rightarrow$) Si $d = PGCD(a, b)$ alors d divise a et b donc d divise toute combinaison linéaire de a et b donc d divise $a - bq = r$ donc d divise b et r

($\Leftarrow$) Réciproquement : si d divise r et b alors d divise $bq + r = a$ toute combinaison linéaire des 2, par ex : d divise a et b ou d divise b et r donc d divise b et a, conclusion d'où l'ensemble des diviseurs communs à a et b est le même que celui des diviseurs commun à b et r donc par conséquent ils ont le même plus grand commun diviseur c-à-d le même PGCD donc $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$

b) **Principe 2 :**

Si b divise a alors PGCD (a, b) = ……b……

Démonstration : si b divise a (c-à-d $a = bq$ où q entier) et comme b divise b alors b est un diviseur commun de a et b, donc b divise le PGCD or aucun autre entier plus grand que b ne peut diviser b donc b est le PGCD de a et b

La réciproque est vraie si PGCD (a, b) = b alors ……b divise a et b donc b divise a

c) Exemples d'application :

Ex n° 1 :

1) Montrer que PGCD ($n^2 + 4n + 5$; $n + 3$) = PGCD ($n + 3$; 2) où n entier naturel
2) En déduire les entiers naturels n pour lesquels $n^2 + 4n + 5$ et $n + 3$ sont premiers entre eux .

1) Soit d diviseur commun à n^2+4n et à $n+3$.

$n^2+4n+5 = n(n+3) - 3n + 4n + 5 = n(n+3) + n + 5$

$= n(n+3) + (n+3) + 2$

$\boxed{n^2+4n+5 = (n+1)(n+3) + 2}$

Montrons l'équivalence : d divise (n^2+4n) et $(n+3)$ $\Leftrightarrow$ d divise $(n+3)$ et 2

d'où ($\Rightarrow$) si d est un diviseur commun de n^2+4n+5 et de $n+3$ alors d divise toute combinaison linéaire des 2 donc d divise $n^2+4n+5 - (n+1)(n+3) = 2$ donc d est un diviseur commun de $n+3$ et 2

($\Leftarrow$) Réciproquement : si d est un diviseur commun de $n+3$ et 2 alors d divise toute combinaison linéaire des 2. par ex d divise $(n+1)(n+3) + 2 = n^2+4n+5$ donc d est un diviseur commun de n^2+4n+5 et $n+3$

Conclusion : L'ensemble des diviseurs communs à n^2+4n+5 et $n+3$ est le même que celui des diviseurs communs à $n+3$ et 2. Par conséquent, ils ont le même plus grand diviseur commun donc $PGCD(n^2+4n+5, n+3) = PGCD(n+3, 2)$ divise 2 et $n+3$

donc $PGCD(n^2+4n+5, n+3) = PGCD(n+3 ; 2)$

les diviseurs positifs de 2 sont : 1 et 2

donc $\boxed{PGCD(n^2+4n+5, n+3) = 1 \text{ ou } 2}$

2) Ex 1 (suite)
on a montré que $PGCD(n^2+4n+5, n+3) = PGCD(n+3; 2)$

Calculons $PGCD(n+3; 2)$ selon les valeurs de n, ce PGCD divise 2

Donc dans la division euclidienne par 2, tout entier n est de la forme $n = 2q + r$ avec $0 \leq r < 2$

$n \equiv r (2)$ avec $r = 0, 1$

disjonction des cas. 1e Cas si $r = 0$, $\underline{n = 2q}$

$n \equiv 0 (2)$

$n+3 \equiv 3 (2)$ or $3 = 2 \times 1 + 1$, $3 \equiv 1 (2)$

$n+3 \equiv 1 (2)$

le reste est donc $r = 1$ avec $0 \leq 1 < 2$

et $n+3 = 2q+1$ donc d'après le lemme d'Euclide (Principe 1) $PGCD(a, b) = PGCD(b; r)$ si $a = bq + r$

donc si $a = n+3$ et $b = 2$ on a $r = 1$

et donc $PGCD(n+3; 2) = PGCD(2; 1)$

les diviseurs de 2 sont 1, 2 ; le diviseur de 1 est 1 } donc le plus grand commun diviseur entre 2 et 1 est 1 donc $\boxed{PGCD(n+3; 2) = 1}$

2e Cas si $r = 1$, $\underline{n = 2q+1}$

$n \equiv 1 (2)$

$n+3 \equiv 4 (2)$ or $4 = 2 \times 2 + 0$ où $0 \leq 0 < 2$

$\boxed{n+3 \equiv 0 (2)}$

donc 2 divise $n+3$ et d'après le principe 2 de l'algorithme d'Euclide ("si b divise a alors $PGCD(a, b) = b$")

donc si $b = 2$ et $a = n+3$ on a :

$\boxed{PGCD(n+3, 2) = 2}$

Résumé

n	$2q$	$2q+1$
$PGCD(n+3, 2)$	1	0
$PGCD(n^2+4n+5, n+3)$	1	0
$PGCD(n^3+4n^2+5n, n^2+3n)$	$1 \times n = n = 2q$	$0 \times n = 0$

Remarque : on peut aussi en déduire le $PGCD(n^3+4n^2+5n, n^2+3n)$

En effet :

$n^3+4n^2+5n = n(n^2+4n+5)$

$n^2+3n = n(n+3)$

donc $PGCD(n^3+4n^2+5n; n^2+3n) = PGCD(\underline{n}(n^2+4n+5); \underline{n}(n+3))$

comme $PGCD(ka; kb) = |k| \, PGCD(a, b)$

on a avec $k = n$ $PGCD(n^3+4n^2+5n, n^2+3n) = |n| \, PGCD(n^2+4n+5, n+3)$

or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ et $|n| = n$

donc $\boxed{PGCD(n^3+4n^2+5n, n^2+3n) = n \, PGCD(n^2+4n+5, n+3)}$

Exercices supplémentaires

① on pose $A = 2n+3$ et $B = 3n+4$

Montrer que A et B sont premiers entre eux c.a.d $PGCD(A, B) = 1$

But : Trouver une relation en A et B indépendante de n.

$3A - 2B = 3(2n+3) - 2(3n+4) = \cancel{6n} + 9 - \cancel{6n} - 8$

$\boxed{3A - 2B = 1}$

Soit $d = PGCD(A; B)$, alors d divise A et B donc d divise toute combinaison linéaire de A et B donc d divise $3A - 2B = 1$

or le seul diviseur positif de 1 est 1 donc $\boxed{d = PGCD(A, B) = 1}$

et A et B sont premiers entre eux