Exercice de probabilité type BAC (durée de vie d'une peluche)

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.

   Calculer la valeur exacte de λ.
2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.

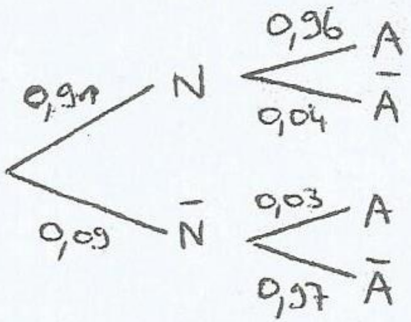
   Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

   Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Corrigé de l'exercice : durée de vie d'une peluche

Exercice type BAC – Proba –

Ⓐ 1)



D'après l'énoncé :

$p(\bar{N}) = 0{,}09$

$p_N(A) = 0{,}96$

$p_{\bar{N}}(\bar{A}) = 0{,}97$

2) D'après la formule des probabilités totales :

$p(A) = p(N \cap A) + p(\bar{N} \cap A)$

$= 0{,}91 \times 0{,}96 + 0{,}09 \times 0{,}03$

$= \underline{0{,}8763}$

3) on veut déterminer : $P_A(N)$

$P_A(N) = \dfrac{p(N \cap A)}{p(A)} = \dfrac{0{,}91 \times 0{,}96}{0{,}8763} = \dfrac{0{,}8736}{0{,}8763}$

$\simeq \underline{0{,}9969}$

⚠ aux dix-millièmes

Ⓑ 1) * $P(D \leq 4) = 0{,}5$

* Signifie que la probabilité que la durée de vie d'une peluche soit inférieur à 4 ans est de 0,5.

* $P(D \leq 4) = 0{,}5 \Leftrightarrow p(0 \leq D \leq 4) = 0{,}5$

explication :

$p(0 \leq D \leq 4)$

$= \int_0^4 \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^4$

$= -e^{-\lambda \times 4} - \left(-e^{-\lambda \times 0}\right)$

$= \underline{e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 4}}$

$e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 4} = 0{,}5$

$1 - e^{-\lambda \times 4} = 0{,}5$

$-e^{-\lambda \times 4} = 0{,}5 - 1$

$-e^{-\lambda \times 4} = -0{,}5$

$e^{-\lambda \times 4} = 0{,}5$

$\ln(e^{-\lambda \times 4}) = \ln(0{,}5)$

$-\lambda \times 4 = \ln(0{,}5)$

$\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}5)}{4}$

$\lambda \simeq \underline{0{,}1733}$

2) $P_{(\ \geq 3)}(\ \geq 3+5) = P(\ \geq 5)$

propriété de durée de vie sans vieillissement.

$= 1 - P(0 \leq X \leq 5)$

$= 1 - (1 - e^{-0{,}1733 \times 5})$

$= e^{-0{,}8665}$

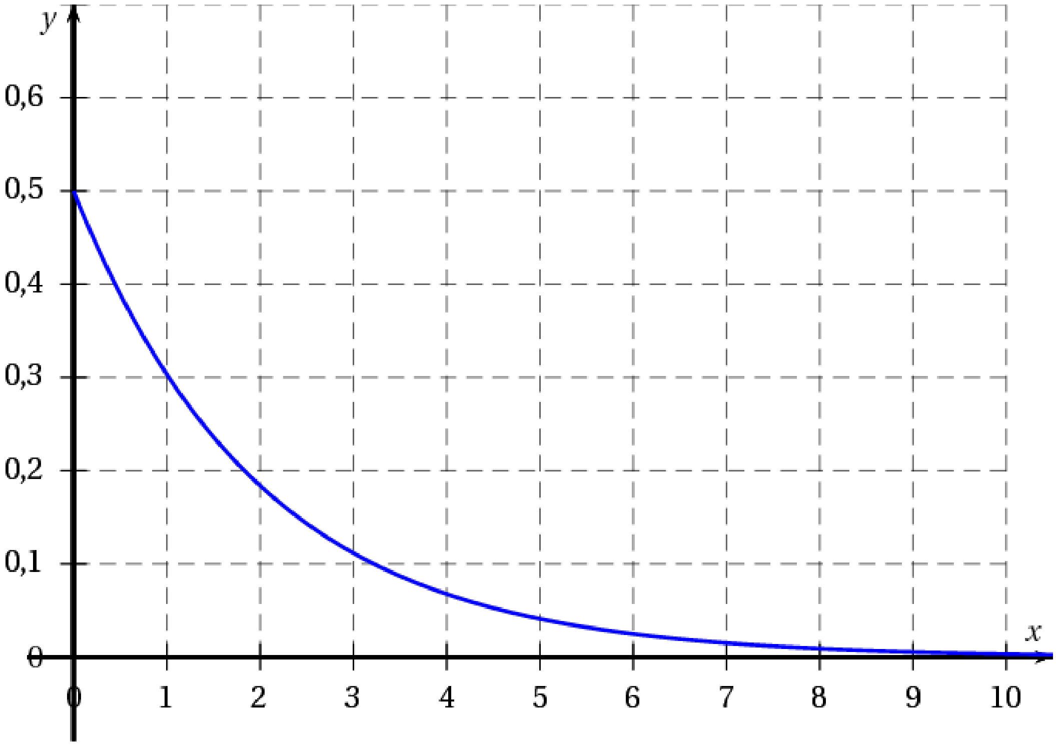
$\simeq \underline{0{,}4204}$ ⊕ phrase.

Exercice de probabilité type BAC (composant électronique)

Partie A

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.



1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a. Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

b. Calculer la valeur de λ.

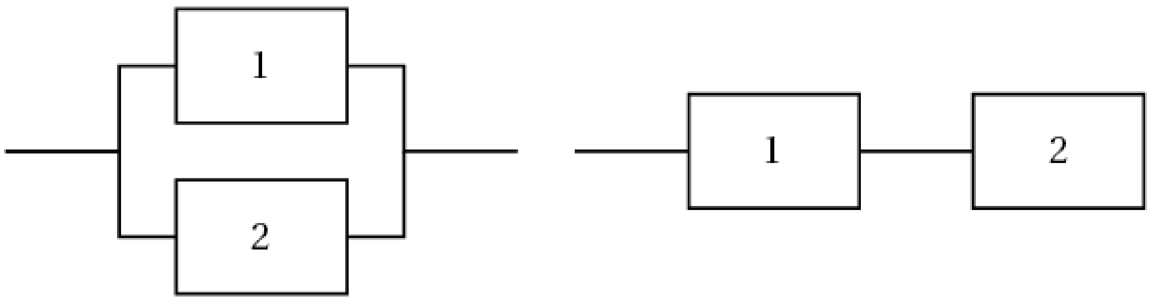
c. Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,01$ près.

Interpréter ce résultat.

d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A

Circuit en série B

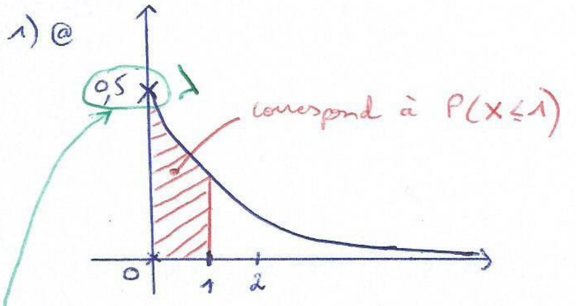
1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Corrigé de l'exercice : composant électronique

Corrigé de l'exercice de probabilité type BAC

Partie (A) :

1) ⓐ



ⓑ La valeur de λ correspond à l'ordonnée à l'origine (ici : $\lambda = 0,5$)

2) ⓐ $E(X) = 2$ signifie que le composant électronique a une durée de vie moyenne de 2 ans.

ⓑ Comme $E(X) = 2$ et $\underset{\uparrow \text{ « cours »}}{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

donc $\frac{1}{\lambda} = 2$

d'où $\lambda = \frac{1}{2} = 0,5$ (Cohérent avec 1)ⓑ)

ⓒ
$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(0 \leq X \leq 2) \\
&= \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^2 \\
&= (-e^{-\lambda \times 2}) - (-e^{-\lambda \times 0}) \\
&= -e^{-2\lambda} + 1 \\
&= 1 - e^{-2\lambda} \\
&= 1 - e^{-2 \times 0,5} \\
&= 1 - e^{-1} \\
&\simeq 0,63 \text{ (valeur approchée à } 10^{-2} \text{ près)}
\end{aligned}$$

La probabilité qu'un composant électronique ait une durée de vie inférieure à 2 ans est de 0,63.

ⓓ on veut déterminer : $P_{(X \geq 1)}(X \geq 3)$

$$\begin{aligned}
P_{(X \geq 1)}(X \geq 3) &= P_{(X \geq 1)}(X \geq 1 + 2) \\
&= P(X \geq 2) \quad \text{« propriété de durée de vie sans vieillissement »} \\
&= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - (1 - e^{-1}) \quad \text{(d'après 2)ⓒ)} \\
&= e^{-1} \text{ (valeur exacte)} \\
&(\simeq 0,37)
\end{aligned}$$

Partie (B) :

1) Pour le montage "en parallèle" on a : D_1 et D_2 qui sont indépendants

donc $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2)$

"circuit défaillant lorsque les 2 composants sont défaillants en même temps" → "à la fois"

$$= 0,39 \times 0,39 = 0,1521$$

2) Pour le montage "en série" on cherche : $P(D_1 \cup D_2)$

"circuit défaillant lorsqu'au moins 1 des composants est défaillant" → "l'un ou l'autre"

$$\begin{aligned}
P(D_1 \cup D_2) &= P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) \\
&= 0,39 + 0,39 - 0,1521 \\
&= 0,6279
\end{aligned}$$

EXERCICE DE BAC (PONDICHERY 2014)

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.

Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.

b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

Sujet C p 349 (du livre)

Sujet C

Les deux rives d'un estuaire sont reliées par des bateaux qui quittent la rive nord exactement toutes les 10 minutes.

M. Dulac séjourne sur la rive nord et traverse l'estuaire une fois par jour pour se rendre dans la partie sud. Son arrivé au point d'embarquement sur la rive nord se fait au hasard.

1. Le temps, en minutes, séparant l'arrivée de M. Dulac à l'embarcadère du prochain départ du bateau, définit une variable aléatoire T qui suit une loi uniforme.

a. Quel est le temps d'attente moyen de M. Dulac à l'embarcadère ?

b. Montrer que la probabilité qu'un jour donné M. Dulac attende plus de 7 minutes à l'embarcadère est $p = 0{,}3$.

2. M. Dulac séjourne 10 jours sur la rive nord.

Le nombre de jours où son attente, pour prendre le bateau, est supérieure à 7 minutes définit une variable aléatoire X.

On suppose que l'arrivée de M. Dulac à l'embarcadère se fait de façon indépendante d'un jour à l'autre.

a. Quelle est la loi suivie par X ? Déterminer $E(X)$.

b. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que M. Dulac n'attende jamais plus de 7 minutes à l'embarcadère.

Sujet E ROC

Capacités mises en œuvre

- *Démontrer une propriété du cours*
- *Calculer l'espérance d'une loi exponentielle*

1. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif, la densité de probabilité de la loi de X est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

a. Déterminer deux réels A et B tels que la fonction G définie par $G(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$ soit une primitive sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction g définie par $g(t) = t\,f(t)$.

b. En utilisant le résultat de la question **a.**, montrer que :

$$\int_0^b t\,f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\, e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1\right).$$

c. En déduire la valeur de $E(X)$.

2. Application

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de λ, sachant que la probabilité qu'un agenda fonctionne plus de 1 000 heures est 0,771.

b. En déduire la durée de vie moyenne d'un agenda électronique. Le résultat sera arrondi à l'heure près.

Exercice de BAC : PONDICHERY 2014

1) On sait que : $P(X \leq 2) = 0,15$

donc $p(0 \leq X \leq 2) = 0,15$

d'où $e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 2} = 0,15$

$1 - e^{-2\lambda} = 0,15$

$-e^{-2\lambda} = -0,85$

$e^{-2\lambda} = 0,85$

$\ln(e^{-2\lambda}) = \ln(0,85)$

$-2\lambda = \ln(0,85)$

$\lambda = \frac{\ln(0,85)}{-2}$

d'où $\underline{\lambda \simeq 0,081}$

2) ⓐ $p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3)$

$= 1 - p(0 < X < 3)$

$= 1 - (e^{-0,081 \times 0} - e^{-0,081 \times 3})$

$= 1 - (1 - e^{-0,243})$

$= e^{-0,243}$ (valeur exacte)

$\simeq \underline{0,78}$ (valeur approchée)

ⓑ $p_{(X \geq t)}(X \geq t+h) = \frac{p((X \geq t) \cap (X \geq t+h))}{p(X \geq t)}$

$= \frac{p(X \geq t+h)}{p(X \geq t)}$

$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$

$= e^{-\lambda(t+h) - (-\lambda t)}$

$= e^{-\lambda h}$

$= \underline{\underline{p(X \geq h)}}$

propriété de durée de vie sans vieillissement

ⓒ on veut déterminer : $p_{(X \geq 3)}(X \geq 5)$

on a : $p_{(X \geq 3)}(X \geq 5) = p_{(X \geq 3)}(X \geq 3+2)$

$= p(X \geq 2) = e^{-0,081 \times 2}$

$= e^{-0,162} \simeq \underline{0,85}$

⊕ phrase

ⓓ $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,081}$

donc $E(X) = \underline{12,35}$ (durée de vie moyenne en année)

Sujet Ⓒ p 349

1) D'après l'énoncé T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;10]$

ⓐ $E(T) = \frac{0+10}{2} = \frac{10}{2} = \underline{5}$

donc le temps d'attente moyen de M. Dula est de 5 minutes

ⓑ $p(T \geq 7) = p(7 \leq T \leq 10)$

$= \frac{10-7}{10-0} = \frac{3}{10} = \underline{\underline{0,3}}$

⊕ phrase

2) ⓐ On répète 10 fois, de manière indépendante, une expérience à 2 issues dont la probabilité de succès est $p = p(T \geq 7) = 0,3$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $(10;0,3)$

d'où $E(X) = 10 \times 0,3 = \underline{\underline{3}}$

ⓑ on veut déterminer : $p(X=0)$

donc $p(X=0) = \binom{10}{0} \times 0,3^0 \times (1-0,3)^{10-0}$

$= 1 \times 1 \times 0,7^{10}$

$= 0,7^{10} \simeq \underline{\underline{0,028}}$ ⊕ phrase

Sujet Ⓔ p 350

1) ROC

ⓐ $G'(t) = A \times e^{-\lambda t} + (At+b) \times (-\lambda e^{-\lambda t})$

$= \underline{\underline{(-\lambda At + (A - \lambda b))e^{-\lambda t}}}$

or, on veut que $G'(t) = g(t)$

donc pour cela, il suffit que : $\begin{cases} -\lambda A = \lambda \\ A - \lambda b = 0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} A = -1 \\ b = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$ et $\underline{\underline{G(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}}}$

ⓑ $\int_0^b t f(t)\,dt = \int_0^b g(t)\,dt$

$= G(b) - G(0)$

$= \left(-b - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda b} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda \times 0}$

$= \left(-b - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1\right)}}$

ⓒ $E(X) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t f(t)\,dt$

$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1\right)$

or, • $\lim_{b \to +\infty} (-\lambda b)e^{-\lambda b} = \lim_{X \to -\infty} X e^X = \underline{\underline{0}}$

$X = -\lambda b$ et $\lambda > 0$

• $\lim_{b \to +\infty} -e^{-\lambda b} = \underline{0}$

• $\lim_{b \to +\infty} 1 = \underline{1}$

Par somme $\lim_{b \to +\infty} (-\lambda b e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1) = \underline{1}$

Puis par produit : $\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1\right)$

$= \frac{1}{\lambda} \times 1 = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$

Ainsi : $\underline{\underline{E(X) = \frac{1}{\lambda}}}$

2) ⓐ La probabilité qu'un agenda fonctionne plus de 1000 heures est de 0,771

donc $p(X \geq 1000) = 0,771$

d'où $1 - p(X < 1000) = 0,771$

$1 - p(0 < X < 1000) = 0,771$

$1 - (1 - e^{-1000\lambda}) = 0,771$

$e^{-1000\lambda} = 0,771$

$\ln(e^{-1000\lambda}) = \ln(0,771)$

$-1000\lambda = \ln(0,771)$

$\lambda = \frac{\ln(0,771)}{-1000}$

$\lambda \simeq 2,6 \cdot 10^{-4}$

$\underline{\underline{\lambda \simeq 0,00026}}$

ⓑ $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{\ln(0,771)}{-1000}} = \frac{-1000}{\ln(0,771)}$

$\simeq \underline{\underline{3845}}$

Ainsi : La durée de vie moyenne d'un agenda électronique est de $\underline{\underline{3845 \text{ heures}}}$