<u>Chapitre - 14 – Géométrie dans l'espace</u>

I] Notion de vecteur de l'espace

1) Rappel sur les vecteurs du plan

Dans le plan, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent être : ou

<u>Remarques :</u>

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ……………………………………………………………………………………
- Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent un repère du …………….. .
- La colinéarité sert à démontrer que :

  - ……

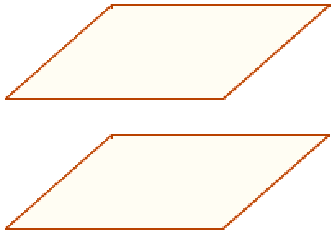
  - ……

2) Extension des définitions aux vecteurs de l'espace

*Dans l'espace, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront toujours (quitte à les déplacer) dans un même ………… .

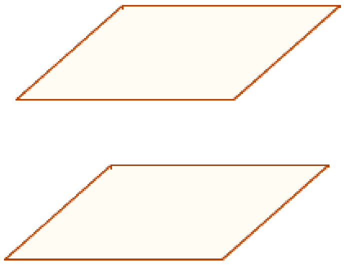
On dira qu'ils sont ……………………………… .

Ainsi, dans l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent donc également être : ou

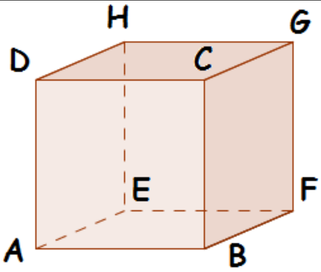
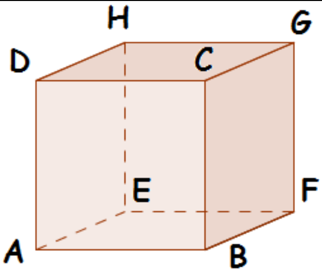
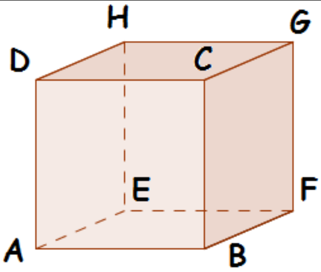
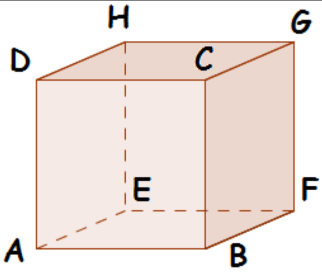


*Dans l'espace, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne seront pas toujours dans un même ………… (même en les déplaçant)

Ainsi, dans l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ peuvent donc être : ou



<u>Vérification du vocabulaire :</u> (Exercice avec des vecteurs du cube)

			
$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont ………………………………………	$\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont ………………………………………	$\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont ………………………………………	$\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont ………………………………………

3) *Caractérisation mathématiques des vecteurs coplanaires*

Définition : Des vecteurs sont COPLANAIRES si, et seulement si, leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans

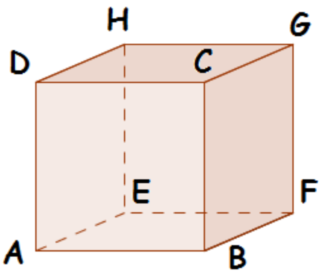
Propriétés : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, ……………………………………………

………

En pratique, on exprimera un des vecteurs en fonction des deux autres. En effet, si on arrive à montrer que : ………

………

Exemple :



Montrer que : $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont

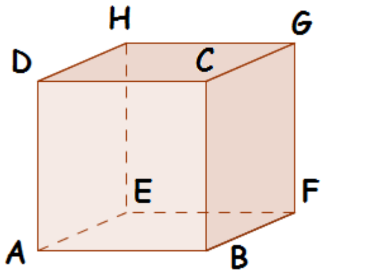
………………………………………………………

Propriétés : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si, et seulement si, ………………………………

………

Application : La coplanarité des vecteurs servira tout d'abord à démontrer que 4 points sont ……………………………… (c'est-à-dire dans le même ……………….). En effet, A, B, C et D sont ……………………… si, et seulement si, ………

Exemple :

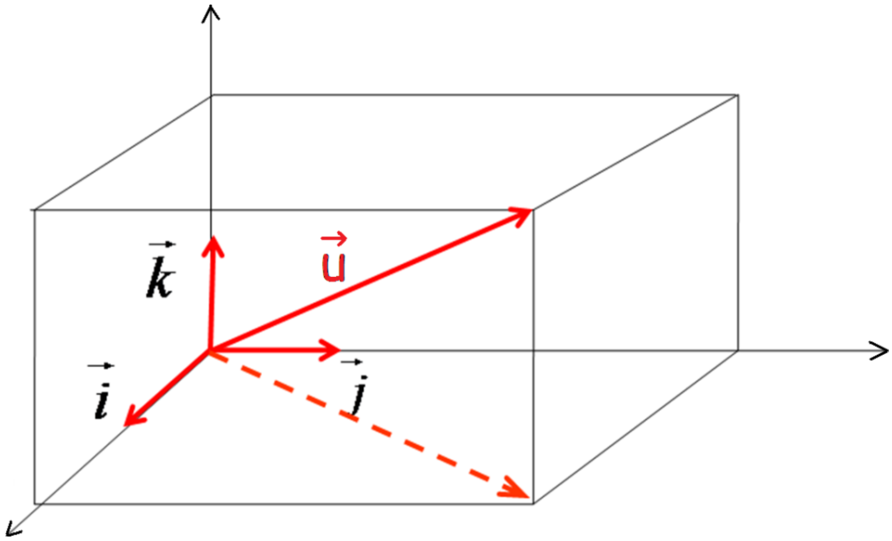
<table><tr><td>

<u>Montrer que</u> : A , F , G et D sont
………………………………………………………</td><td></td></tr></table>

II] Repérage dans l'espace (pour pouvoir travailler avec des coordonnées)

1) Décomposition d'un vecteur dans une base

<u>Propriété :</u> Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs ……………………………………………………………………… .
Alors pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que : $\vec{u} =$



2) Repère de l'espace

<u>Définitions :</u>
(1) Un repère de l'espace est un quadruplet $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$ dans lequel :

- O est un ……
- $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois ………………………………………………………………………………………………………

(2) Si $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, alors le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$ est dit ………………………………… lorsque les droites (OI) , (OJ) et (OK) sont deux à deux ……………………………………………… et que OI…… OJ…… OK…… 1 .

(3) Les réels x , y et z tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ sont les ………………………………… du vecteur $\vec{u}$.

On notera : $\vec{u}(\quad;\quad;\quad)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

(4) Si M est un point de l'espace, alors les coordonnées de M dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$ sont celles du vecteur ……… .

(5) Les trois coordonnées d'un point porte chacune un nom différent :

- La première s'appelle ……………………………………
- La deuxième s'appelle ……………………………………
- La troisième s'appelle ……………………………………

<u>Propriétés</u>: Soit $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$ deux vecteurs de l'espace dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$.

(1) $\vec{u}=\vec{v}$ si, et seulement si, ………………………………………………

(2) $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées ………………………………………………

(3) Si λ est un réel, alors $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées ………………………………………………

<u>Propriétés</u>: Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points de l'espace dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$.

(1) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ………………………………………………………………………

(2) Le milieu I de [AB] a pour coordonnées ………………………………………………………………………

(3) Si le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$ est ……………………… , alors la distance entre A et B se calcule en faisant :

$AB=$ ……

<u>3) Synthèse</u>

………

………

………

………

………

………

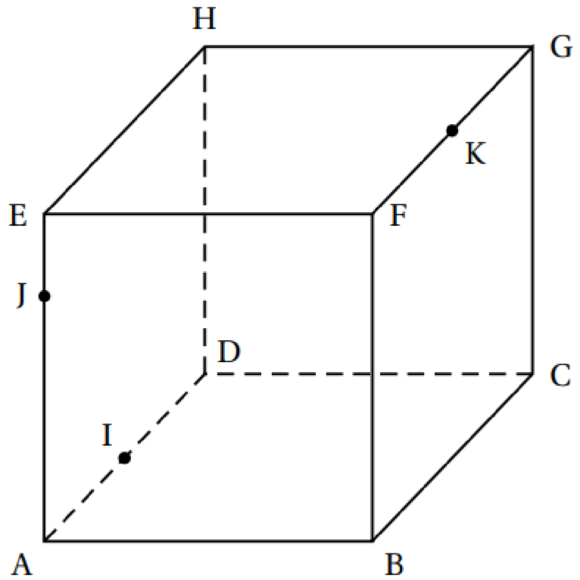
………

………

SAVOIR DETERMINER LES COORDONNEES DE POINTS DE L'ESPACE AU BAC :

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;
- K est le milieu du segment [FG].



On se place désormais dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Donner sans justification les coordonnées des points suivants :

A(; ;)	B(; ;)	C(; ;)	D(; ;)
E(; ;)	F(; ;)	G(; ;)	H(; ;)
I(; ;)	J(; ;)	K(; ;)	

96 On considère les points A (−1 ; −4 ; 5), B (2 ; 0 ; 3), C(−8 ; −11 ; 8) et D(−4 ; −15 ; 12).

1. Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que les points A, B et M sont alignés.

98 On considère le tétraèdre ABCD avec A (1 ; 2 ; 3), B(4 ; −5 ; 6), C (0 ; 0 ; 3) et D (7 ; 8 ; −9). On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

1. Déterminer les coordonnées des points E et F tels que IACE et IBDF soient des parallélogrammes.
2. Montrer que J est le milieu du segment [EF].

106 On considère les points A (3 ; 2 ; 1), B (10 ; 6 ; −1), C(9 ; 8 ; −9) et D(2 ; 4 ; −7).
Démontrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

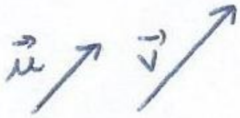
Cours complété :

Chapitre - 14 - Géométrie dans l'espace

I] Notion de vecteur de l'espace

1) Rappel sur les vecteurs du plan

Dans le plan, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent être : colinéaires ou non colinéaires



Remarques :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$
- Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent un repère du plan.
- La colinéarité sert à démontrer que :
  - 2 droites sont parallèles
  - 3 points sont alignés.

2) Extension des définitions aux vecteurs de l'espace

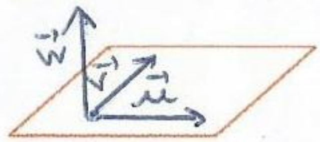
*Dans l'espace, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront toujours (quitte à les déplacer) dans un même plan

On dira qu'ils sont COPLANAIRE

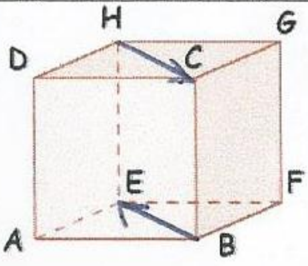
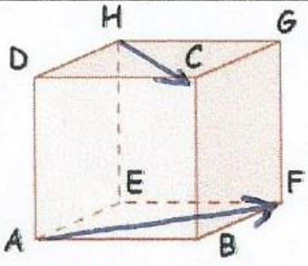
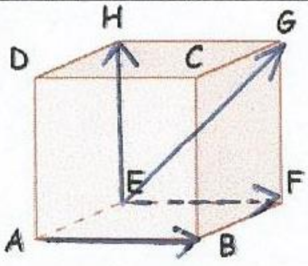
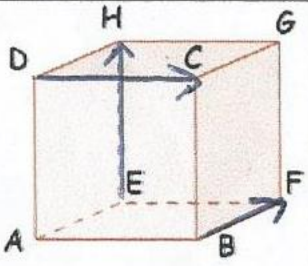
Ainsi, dans l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent donc également être : colinéaires ou non colinéaires

*Dans l'espace, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne seront pas toujours dans un même plan. (même en les déplaçant)

Ainsi, dans l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ peuvent donc être : coplanaires ou non coplanaires

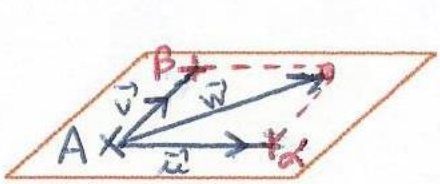


Vérification du vocabulaire : (Exercice avec des vecteurs du cube)

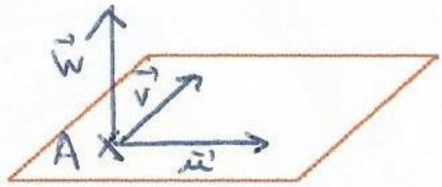
			
$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires	$\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont coplanaires	$\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont coplanaires	$\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont non coplanaires

3) Caractérisation mathématiques des vecteurs coplanaires

Définition : Des vecteurs sont COPLANAIRES si, et seulement si, leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans le même plan.



cas coplanaires

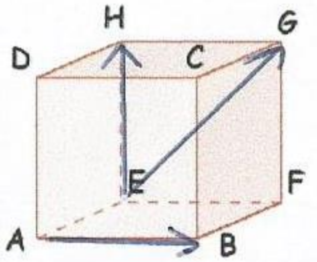


cas non coplanaires

Propriétés : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe a, b et c réels tel que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ (non tous nuls)

En pratique, on exprimera un des vecteurs en fonction des deux autres. En effet, si on arrive à montrer que : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ alors on a : $\vec{w} - \alpha\vec{u} - \beta\vec{v} = \vec{0}$ et on en déduit que : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Exemple :



Montrer que : $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont coplanaires

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ (Chasles)

$\quad = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH}$

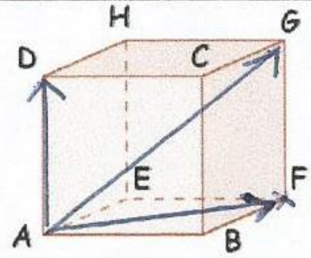
donc $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EH} = \vec{0}$

d'où les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont coplanaires.

Propriétés : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si, et seulement si, l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$

Application : La coplanarité des vecteurs servira tout d'abord à démontrer que 4 points sont coplanaires (c'est-à-dire dans le même plan). En effet, A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires

Exemple :



Montrer que : A , F , G et D sont coplanaires

$\vec{AG} = \vec{AF} + \vec{FG} = \vec{AF} + \vec{AD}$

↑ Chasles

donc $\vec{AG} - \vec{AF} - \vec{AD} = \vec{0}$ et $\vec{AF}$, $\vec{AG}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

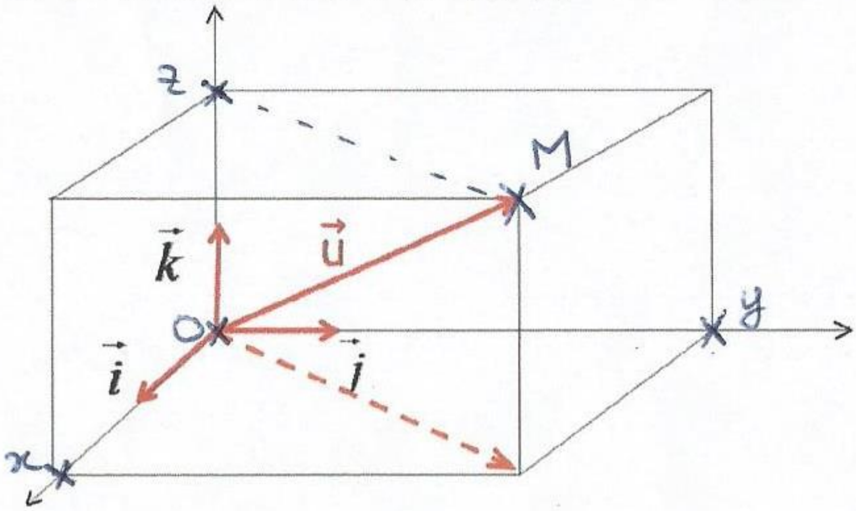
Ainsi : A, F, G et D sont coplanaires.

II] Repérage dans l'espace (pour pouvoir travailler avec des coordonnées)

1) Décomposition d'un vecteur dans une base

Propriété : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires .

Alors pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



2) Repère de l'espace

Définitions :

(1) Un repère de l'espace est un quadruplet $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ dans lequel :

- O est un point de l'espace, appelé origine
- $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires

(2) Si $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, alors le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est dit orthonormé lorsque les droites (OI) , (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires et que $OI = OJ = OK = 1$.

(3) Les réels x , y et z tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

On notera : $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(4) Si M est un point de l'espace, alors les coordonnées de M dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$

(5) Les trois coordonnées d'un point porte chacune un nom différent :

- La première s'appelle l'abscisse
- La deuxième s'appelle l'ordonnée
- La troisième s'appelle la cote

Propriétés: Soit $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$ deux vecteurs de l'espace dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$.

(1) $\vec{u}=\vec{v}$ si, et seulement si, $x=x'$, $y=y'$ et $z=z'$

(2) $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x'\,;\,y+y'\,;\,z+z')$

(3) Si λ est un réel, alors $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x\,;\,\lambda y\,;\,\lambda z)$

Propriétés: Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points de l'espace dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$.

(1) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A\,;\,z_B-z_A)$

(2) Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

(3) Si le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$ est orthonormé, alors la distance entre A et B se calcule en faisant :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

3) Synthèse

Ainsi, pour faire de la géométrie dans l'espace avec des coordonnées, on dispose des mêmes formules et des mêmes méthodes que dans le plan.
La seule nouveauté est qu'il y a une troisième coordonnées qu'il ne faut pas oublier. Il s'agit de z : la cote.

Correction de l'exercice : **SAVOIR DETERMINER LES COORDONNEES DE POINTS DE L'ESPACE AU BAC**

A(0 ;0 ;0)	B(1 ;0 ;0)	C(1 ;1 ;0)	D(0 ;1 ;0)
E(0 ;0 ;1)	F(1 ;0 ;1)	G(1 ;1 ;1)	H(0 ;1 ;1)
I(0 ;0,5 ;0)	J(0 ;0 ;0,75)	K(1 ;0,5 ;1)	