Sujet D p 259 (BAC)

1) Δ passe par le point $A(1;-2;-1)$ et est dirigé par $\vec{AB}(2;-3;-1)$

donc une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2) Δ et Δ' ne sont pas coplanaires

$\boxed{\text{SSi}}$ Δ et Δ' ne sont pas parallèles et ne sont pas sécantes

• Δ est dirigé par $\vec{AB}(2;-3;-1)$

Δ' est dirigé par $\vec{v}(-1;2;1)$

OR, $\vec{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

donc Δ et Δ' ne sont pas parallèles.

• Δ et Δ' sont sécantes

$\boxed{\text{SSi}}$ il existe $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 1+2t = 2-k \\ -2-3t = 1+2k \\ -1-t = k \end{cases}$

OR $\begin{cases} 1+2t = 2-(-1-t) \\ -2-3t = 1+2k \\ k = -1-t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ -2-3\times 2 = 1+2\times(-3) \\ k = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} t = 2 \\ -8 = -5 \rightarrow \text{IMPOSSIBLE} \\ k = 3 \end{cases}$

donc Δ et Δ' ne sont pas sécantes.

Ainsi : Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.

3) a) C, D et E définissent un plan

$\boxed{\text{SSi}}$ C, D et E ne sont pas alignés.

OR, $\vec{CD}\begin{pmatrix}2\\7\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{CE}\begin{pmatrix}-1\\9\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Donc C, D et E ne sont pas alignés

Ainsi : C, D et E définissent un plan.

b) On a : $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{CD}\begin{pmatrix}2\\7\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{CE}\begin{pmatrix}-1\\9\\-1\end{pmatrix}$

Comme $\vec{CD}$ et $\vec{CE}$ ne sont pas colinéaires on cherche α et β réels tels que

$\vec{AB} = \alpha\vec{CD} + \beta\vec{CE}$

cela donne : $\begin{cases} 2 = 2\alpha - \beta \\ -3 = 7\alpha + 9\beta \\ -1 = -3\alpha - \beta \end{cases}$.

$\begin{cases} \beta = 2\alpha - 2 \\ -3 = 7\alpha + 9\times(2\alpha - 2) \\ -1 = -3\alpha - \beta \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = -0{,}8 \\ \alpha = 0{,}6 \\ -1 = -3\times 0{,}6 - (-0{,}8) \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = -0{,}8 \\ \alpha = 0{,}6 \\ -1 = -1 \end{cases}$ (cohérent)

d'où $\vec{AB} = 0{,}6\vec{CD} - 0{,}8\vec{CE}$

donc $\vec{AB} - 0{,}6\vec{CD} + 0{,}8\vec{CE} = \vec{0}$

Ainsi : $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ et $\vec{CE}$ sont coplanaires.

c) • Δ est dirigé par $\vec{AB}$

• $\mathcal{P}$ est dirigé par $\vec{CD}$ et $\vec{CE}$ qui sont non colinéaires

OR, $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ et $\vec{CE}$ sont coplanaires

Donc Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ (éventuellement contenue dans $\mathcal{P}$).