II] Loi uniforme

1) Définition

Définition : Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
La loi uniforme sur $[a; b]$ est la loi de probabilité ayant pour densité une fonction ………………… sur $[a; b]$.

2) Propriétés

Propriété : La densité de probabilité de la loi uniforme sur $[a; b]$ est la fonction f définie par :

$$f(x) =$$

Exercice : Déterminer la densité f de la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 6]$

……

Propriété : Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ alors,
Pour tout $\begin{cases} c \in [a; b] \\ d \in [a; b] \end{cases}$ avec $c \leq d$, on a : $P(c \leq X \leq d) =$

Démonstration : ………

……

……

Exercice : X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 6]$. Calculer $P(3 \leq X \leq 5)$, $P(X < 4)$ et $P(X \geq 2)$

……

……

……

Propriété : Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$, alors $E(X) =$ ……………………………

Démonstration : ………

……

……

Exercice : X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1 ; 6]$. Calculer $E(X)$.

……

➔ Faire Exercices 49 p 337 pour jeudi 2 Avril

49 La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[12 ; 20]$.

1. Définir la fonction de densité de probabilité de la loi de X.

2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

a. A : « $X < 15$ » ;
b. B : « $X > 17$ » ;
c. C : « $14 < X < 19$ » ;
d. D : « $X < 15,8$ ».

3. Déterminer le réel k tel que $P(X < k) = 0,25$.

4. Déterminer le réel t tel que $P(X > t) = 0,42$.

5. Déterminer $E(X)$.

III] Loi exponentielle

1) Définition

Définition : Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) =$ ……………………

2) Calculs avec la loi exponentielle

Propriété : Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors,
Pour tout $\begin{cases} c \in [a;b] \\ d \in [a;b] \end{cases}$ avec $c \leq d$, on a : $P(c \leq T \leq d) =$

Démonstration :

……

……

……

Exercice : T suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}05$. Calculer $P(10 < T < 30)$, $P(T \leq 30)$ et $P(T \geq 10)$.

……

……

……

Propriété : Si T suit la loi exponentielle de paramètre , alors $E(X) =$ ……

Démonstration (ROC au BAC): ………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Exercice : T suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}05$. Calculer $E(T)$.

……

3) Propriété de durée de vie sans vieillissement

Propriété : Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors,
Pour tout $\begin{cases} t \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases}$, on a : $P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) =$

Démonstration :

……

……

……

……

……

……

➔ Faire exercice 61 p 337 (pour le jeudi 2 Avril)

61 La durée de vie exprimée en années d'un appareil électronique d'un certain modèle est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'un appareil de ce modèle ?

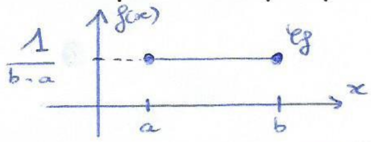
2. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'un appareil de ce modèle soit inférieure à sept ans ? supérieure à sept ans ? comprise entre 4 et 7 ans ?

3. Un appareil de ce modèle est encore en fonctionnement au bout de 4 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à 7 ans ?

II] Loi uniforme

1) Définition

Définition : Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
La loi uniforme sur $[a;b]$ est la loi de probabilité ayant pour densité une fonction constante sur $[a;b]$.



" = et on sait ce qu'elle vaut"

2) Propriétés

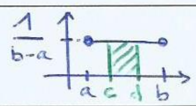
Propriété : La densité de probabilité de la loi uniforme sur $[a;b]$ est la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Exercice : Déterminer la densité f de la loi uniforme sur l'intervalle $[1;6]$ ("a" "b")

$f(x) = \frac{1}{6-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Propriété : Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ alors,
Pour tout $\begin{cases} c \in [a;b] \\ d \in [a;b] \end{cases}$ avec $c \leq d$, on a : $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$



Démonstration :

$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx$ avec $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ (constante)} \\ F(x) = \frac{1}{b-a} \times x \text{ primitive de } f \end{cases}$

$= \left[\frac{1}{b-a} \times x\right]_c^d$

$= \frac{1}{b-a} \times d - \frac{1}{b-a} \times c = \frac{d-c}{b-a}$

"ne pas apprendre par ♡ la formule mais refaire le raisonnement à chaque calcul"

Exercice : X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;6]$. Calculer $P(3 \leq X \leq 5)$, $P(X < 4)$ et $P(X \geq 2)$

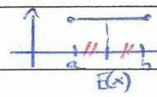
$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 \frac{1}{5}\,dx = \left[\frac{1}{5} \times x\right]_3^5 = \frac{1}{5} \times 5 - \frac{1}{5} \times 3 = \frac{2}{5}$

$P(X < 4) = P(1 < X < 4) = \int_1^4 \frac{1}{5}\,dx = \left[\frac{1}{5} x\right]_1^4 = \frac{1}{5} \times 4 - \frac{1}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$

$P(X \geq 2) = P(2 \leq X \leq 6) = \int_2^6 \frac{1}{5}\,dx = \left[\frac{1}{5} \times x\right]_2^6 = \frac{1}{5} \times 6 - \frac{1}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$

Propriété : Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$

(espérance = moyenne)



Démonstration : $E(X) = \int_a^b x \times f(x)\,dx$

$= \int_a^b x \times \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$

$= \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{b^2-a^2}{(b-a)\times 2} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{(b-a)} \times 2} = \frac{a+b}{2}$

Exercice : X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;6]$. Calculer $E(X)$.

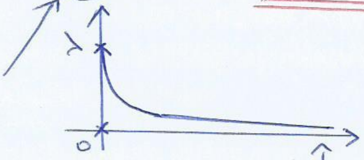
$E(X) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

III] Loi exponentielle

1) Définition

Définition : Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

⚠ Pas de valeur maximale pour la variable T



"permet de modéliser des durées de vies"

"se rapproche sans jamais toucher"

2) Calculs avec la loi exponentielle

Propriété : Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors,
Pour tout $\begin{cases} c \in [a;b] \\ d \in [a;b] \end{cases}$ avec $c \leq d$, on a : $P(c \leq T \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

"ne pas apprendre par cœur, mais refaire le raisonnement à chaque fois !"

Démonstration :

$P(c \leq T \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx$ avec $\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \\ F(x) = -e^{-\lambda x} \text{ primitive de } f \end{cases}$ ⚠ à ne pas oublier !

$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d$

$= -e^{-\lambda d} - (-e^{-\lambda c}) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

Exercice : T suit la loi exponentielle de paramètre 0,05. Calculer $P(10 < T < 30)$, $P(T \leq 30)$ et $P(T \geq 10)$.

"astuce : ne remplacer λ par 0,05 qu'à la fin"

$P(10<T<30) = \int_{10}^{30} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{10}^{30} = -e^{-\lambda \times 30} - (-e^{-\lambda \times 10}) = e^{-10\lambda} - e^{-30\lambda} = e^{-0,5} - e^{-1,5} \approx 0,38$

$P(T \leq 30) = P(0 \leq T \leq 30) = \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{30} = -e^{-\lambda \times 30} - (-e^{-\lambda \times 0}) = 1 - e^{-30\lambda} = 1 - e^{-1,5} \approx 0,78$

"on passe par le contraire"

$P(T \geq 10) = 1 - P(T < 10) = 1 - P(0 \leq T \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10} = 1 - (1 - e^{-10\lambda}) = e^{-10\lambda} = e^{-0,5} \approx 0,61$

↳ $P(10 \leq T \leq +\infty)$ → pas possible pour la suite ⇒ faire le contraire.

Propriété : Si T suit la loi exponentielle de paramètre , alors $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ ♡

Démonstration (ROC au BAC): on admet que $G(x) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}$ est une primitive de $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ sur $[0;+\infty[$ → "PRÉREQUIS"

$E(T) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x \times f(x)\,dx$ avec $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

comme si $\int_0^{+\infty}$

or, $\int_0^b x \times f(x)\,dx = \int_0^b g(x)\,dx = \left[G(x)\right]_0^b$

$= G(b) - G(0)$

$= \left(-b - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda b} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda \times 0}$

$= -be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$

"c'est l'exponentielle qui l'emporte" FI : $\infty \times 0$.

Puis, $\lim\limits_{b \to +\infty} -be^{-\lambda b} = 0$

$\lim\limits_{b \to +\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b} = 0$

$\lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

Par somme, $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b x \times f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}$

Ainsi : $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ □

Exercice : T suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}05$. Calculer $E(T)$.

$E(T) = \frac{1}{0{,}05} = \frac{100}{5} = 20$

3) Propriété de durée de vie sans vieillissement

Propriété : Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors,
Pour tout $\begin{cases} t \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases}$, on a : $P_{(T\geq t)}(T \geq t + h) =$ $P(T \geq h)$

♡ on oublie le temps "t" déjà écoulé, ce qui compte c'est le temps qui s'écoulera "h" supplémentaire

Démonstration : $P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P((T\geq t)\cap(T\geq t+h))}{P(T\geq t)} = \frac{P(T\geq t+h)}{P(T\geq t)}$

or, $P(T\geq t+h) = 1 - P(0 \leq T \leq t+h) = 1 - (e^{-\lambda\times 0} - e^{-\lambda(t+h)}) = e^{-\lambda(t+h)}$

$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$

donc $P_{(T\geq t)}(T\geq t+h) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+h) + \lambda t} = e^{\cancel{-\lambda t} - \lambda h + \cancel{\lambda t}}$

$= P(T \geq h)$ □

➔ Exercice 61 p 337