EXERCICE n°2 : (5 points)

Pour les candidats ayant choisi la spécialité maths

Cet exercice est à rédiger impérativement sur une copie séparée

PARTIE A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$ où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1) Vérifier que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution particulière de (E).

2) Résoudre alors l'équation (E).

3) En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ solution de (E) tel que : $0 \leqslant u \leqslant 25$.

PARTIE B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule $11x + 8$;
- on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y ; x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$, or $129 \equiv 25 \pmod{26}$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z. La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1) Coder la lettre W.

2) Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$11x \equiv j$ (modulo 26) équivaut à $x \equiv 19j$ (modulo 26).

b) En déduire un procédé de décodage.

c) Décoder la lettre W.

Séance du lundi 25 Mai : T.S spé maths correction de l'ex n°2

Ex2 PARTIE A

▶ 1. Démontrer qu'un couple d'entiers est solution d'une équation

On a $11\times(-7)-26\times(-3)=-77+78$.

D'où $11\times(-7)-26\times(-3)=1$.

Le couple $(-7\,;-3)$ est donc une solution particulière de (E).

▶ 2. Résoudre une équation à coefficients entiers

• $(x\,;\,y)$ est un couple solution de (E), équivaut à $\begin{cases}11x-26\times y=1\\ 11x_0-26y_0=1\end{cases}$

$(x_0, y_0)=(-7,-3)$ solution de (E)

D'après le résultat établi dans la question précédente, $(x\,;\,y)$ est un couple solution de (E) si et seulement si $11(x+7)=26(y+3)$.

• 11 et 26 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, $(x\,;\,y)$ est solution de (E) entraîne que $x+7$ est un multiple de 26 et que $y+3$ est un multiple de 11. Ainsi, si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $x=26k-7$ et $y=11k-3$.

• Réciproquement, supposons qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $x=26k-7$ et $y=11k-3$.

On a :

$11x-16y=11\times(26k-7)-26\times(11k-3)=11\times26k-77-26\times11k+78$

d'où $11\times(26k-7)-26\times(11k-3)=1$.

Ainsi le couple $(26k-7\,;\,11k-3)$ est solution de (E).

Par conséquent, les couples d'entiers solutions de (E) sont de la forme $(-7+26k\,;-3+11k)$ avec $k\in\mathbb{N}$.

▶ 3. Déterminer un couple d'entiers solution d'une équation

Soit $(u\,;\,v)$ un couple solution tel que $0\leqslant u\leqslant 25$. On sait qu'il existe k entier tel que $u=26k-7$. Ainsi, on a : $0\leqslant 26k-7\leqslant 25$

$7\leqslant 26k\leqslant 32$. donc $\frac{7}{26}\leq k\leq\frac{32}{26}$ or k entier et $\frac{7}{26}\approx 0{,}269$ $\frac{32}{26}\approx 1{,}23$

Il existe donc une seule valeur entière de k possible vérifiant cette dernière inégalité : $k=1$.

Le couple d'entiers $(u\,;\,v)$ solution de (E) tel que $0\leq u\leq 25$ est donc le couple $\boxed{(19\,;\,8)}$.

PARTIE B

▶ 1. Utiliser la division euclidienne pour trouver un nombre

La lettre W est assimilée au nombre $22.=x$, calculons $11x+8\equiv y\,(26)$

$y\equiv 22\times11+18=250$.

Or, $250\equiv16\pmod{26}$.

$y\equiv16$ est le reste de la division euclidienne de 250 par 26.

Au nombre 16 correspond la lettre Q.

La lettre W est donc codée par la lettre Q.

▶ 2. a) Manipuler des équivalences de congruences

Soit x et j deux nombres entiers relatifs.

• Supposons $11x\equiv j\pmod{26}$. $\times(19)$

Il s'ensuit que $19\times11x\equiv19j\pmod{26}$.

Or $19\times11=209\equiv1\pmod{26}$. en effet $209=8\times26+1$

On en déduit que : $19\times11x\equiv x\pmod{26}$

$\boxed{x\equiv19j\pmod{26}.}$

• Réciproquement, supposons $x\equiv19j\pmod{26}$. $\times(11)$

On en déduit que : $11x\equiv19\times11j\pmod{26}$

$11x\equiv209j\pmod{26}$.

Or $209\equiv1\pmod{26}$,

d'où $11x\equiv j\pmod{26}$.

Il s'ensuit que $11x\equiv j\pmod{26}$ équivaut à $x\equiv19j\pmod{26}$.

On effectue la division euclidienne de 209 par 26. On obtient : $209=26\times8+1$

b) Manipuler des congruences pour trouver un nombre

Soit y un nombre entier tel que $0\leqslant y\leqslant 25$.

L'objectif est de déterminer x, le nombre entier vérifiant les égalités équivalentes suivantes :

$$11x+8\equiv y\pmod{26}$$
$$11x\equiv y-8\pmod{26}$$
$$x\equiv19(y-8)\pmod{26}$$

donc $x\equiv19y-152\ (26)$ or $-152=-6\times26+4$ donc $-152\equiv4\,(26)$

d'après le résultat établi dans la question précédente, donc $x\equiv19y+4\,(26)$ fonction décodage

Ainsi, pour décoder une lettre, on commence par lui associer un nombre entier y tel que $0\leqslant y\leqslant 25$. On calcule ensuite le nombre $19y+4=19(y-8)$. Puis on calcule le reste de la division euclidienne de $19(y-8)\equiv19y+4$ par 26. Le nombre trouvé est le nombre associé à la lettre décodée.

c) Déduire un résultat

La lettre W est assimilée au nombre $22.=y$ donc $x=19y+4=19\times22+4=422\,(26)$

$422=16\times26+6$

$x\equiv422\equiv6\pmod{26}$. Au nombre 6 correspond la lettre G.

Le décodage de W est donc G.