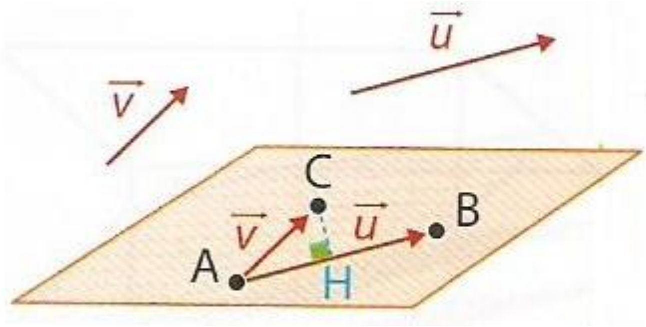
Chapitre - 15 – Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

I] Produit scalaire

1) Approche géométrique

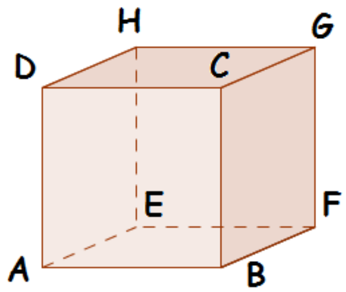


Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Alors il existe au moins un ………………………………………… qui contient les points A, B et C.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire ……………………… calculé dans ……………………………… .
Ainsi , on a :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} =$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

Exercice : On considère le cube ABCDEFGH d'arête a.
Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$



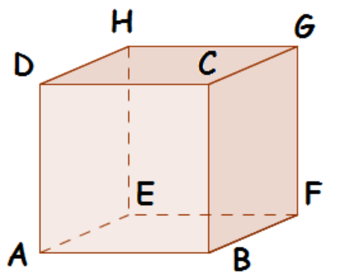
Propriété : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

où H est le …… .

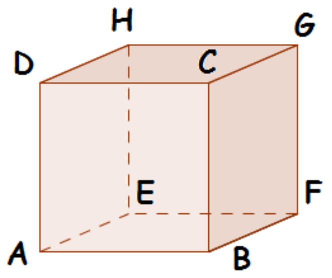
Propriété : Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et si λ est un réel, alors :
(1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$ (2) $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ (3) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) =$

Exercice : Soit I le centre de la face BCGF dans le cube ABCDEFGH d'arrête a.
Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BI}$



2) Lien avec l'orthogonalité

Propriété : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ………………………………………………… si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

Exercice : On considère le cube ABCDEFGH. Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{EB}$	

3) Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Dans un repère orthonormé de l'espace $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\,)$ si on a : $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$,

alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$……………………………………………

En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} =$……………………………… et $\|\vec{u}\| =$………………………………

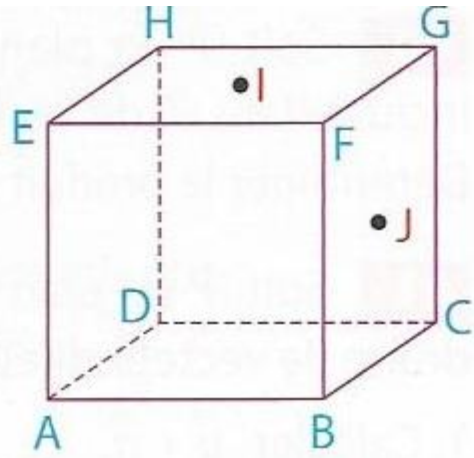
Exercice : Soit $A(1;-1;3)$, $B(4;7;-3)$, $C(0;3;-2)$ et $D(-6;6;-1)$.
Montrer que : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exercice : Soit $A(3;3;-5)$, $B(4;-1;3)$ et $C(5;2;-3)$.
1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{BAC}$ en radian.

➔ Faire exercice 52 p 276 partie exercice (puis vérifier vos réponses avec la correction en fin de document)

52 ABCDEFGH est un cube d'arête a.
I est le centre du carré EFGH et J le centre du carré BCGF.
Calculer les produits scalaires suivants :

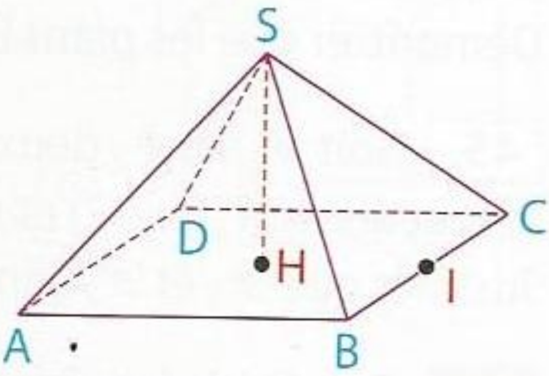


a. $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG}$ **b.** $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF}$

c. $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EI}$ **d.** $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{HD}$

➔ Faire exercice 54 p 276 partie exercice (puis vérifier vos réponses avec la correction en fin de document)

54 SABCD est une pyramide de base carrée ABCD et de sommet S, telle que les faces SAB, SBC, SDC et SDA sont des triangles équilatéraux.
H est le centre du carré ABCD et I est le milieu de [BC]. On pose $AB = a$.
Calculer les produits scalaires suivants :



a. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$ **b.** $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DB}$ **c.** $\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC}$ **d.** $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{SC}$

➔ Faire exercice 60 p 276 partie exercice (puis vérifier vos réponses avec la correction en fin de document)

60 Soit A (1 ; 1 ; 1), B (3 ; 4 ; 0), C (6 ; −2 ; 2) trois points de l'espace et I le milieu de [BC].

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

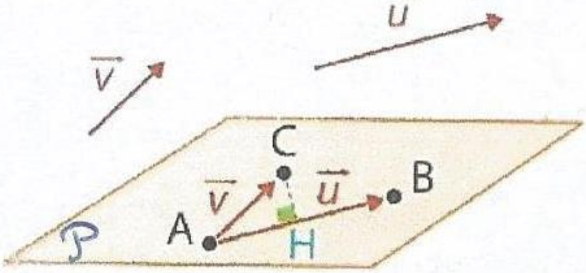
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{BAI}$ en radians.

Cours complété :

Chapitre - 15 - Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

I] Produit scalaire

1) Approche géométrique



Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Alors il existe au moins un plan P qui contient les points A, B et C.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan P.
Ainsi , on a :

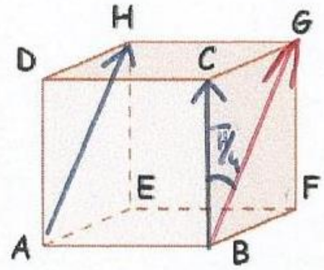
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Exercice : On considère le cube ABCDEFGH d'arrête a.
Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BC}$
$= BG\times BC\times\cos(\widehat{GBC})$

or, $BC = a$ et $BG = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$
et $\widehat{GBC} = \frac{\pi}{4}$

donc $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = a\sqrt{2}\times a\times\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$



Propriété : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors on a :

figure

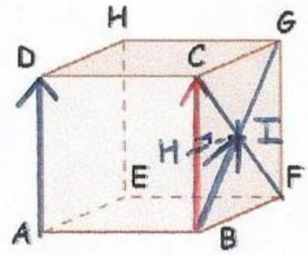
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB\times AH & \text{si les vecteurs même sens} \\ -AB\times AH & \text{si sens} \neq. \end{cases}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

Propriété : Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et si λ est un réel, alors :
(1) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (3) $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Exercice : Soit I le centre de la face BCGF dans le cube ABCDEFGH d'arrête a.
Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BI}$

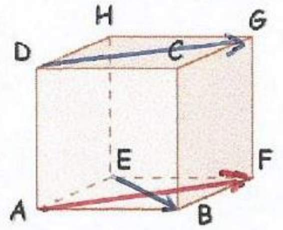
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BI}$
$= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH}$ avec H projeté orthogonal de I sur (BC)
$= BC\times BH$
$= a\times\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$



2) Lien avec l'orthogonalité

⚠ • on parle de vecteurs orthogonaux
• on peut parler de droites → orthogonales / perpendiculaires (ortho + sécantes)

Propriété : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exercice : On considère le cube ABCDEFGH. **Calculer le produit scalaire** : $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{EB}$ $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB}$ or, (AF) et (EB) sont perpendiculaires (car ce sont les diagonales d'un carré) donc $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ et $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$	

3) Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ si on a : $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$,

alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

longueur du vecteur $\vec{u}$

En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Exercice : Soit $A(1;-1;3)$, $B(4;7;-3)$, $C(0;3;-2)$ et $D(-6;6;-1)$.
Montrer que : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\8\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\3\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 3 \times (-6) + 8 \times 3 + (-6) \times 1$
$= -18 + 24 - 6$
$= 0$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux
Ainsi : (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exercice : Soit $A(3;3;-5)$, $B(4;-1;3)$ et $C(5;2;-3)$.
1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + (-4) \times (-1) + 8 \times 2$
$= 2 + 4 + 16$
$= 22$

2) En déduire une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{BAC}$ en radian.

D'une part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 22$
D'autre part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
or, $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9$
$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{22}{9 \times 3} = \dfrac{22}{27}$
donc $\widehat{BAC} \simeq 0{,}62$. (valeur arrondie à 0,01 près).

"$\cos^{-1}\left(\frac{22}{27}\right)$"

calculatrice (en radian → "on est en Maths")

Correction de l'exercice 52 p 276

exercice 52 p 276

a) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} = BF \times BG \times \cos(\widehat{GBF})$

$= a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= a^2$

b) $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$ (car $(EI) \perp (HF)$)

c) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EI} = 0$ (car $(EA) \perp (EI)$)

d) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FB}$

$= \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{FB}$ où H est le projeté orthogonale de J sur (FB)

$= -BH \times FB$

$= -\frac{a}{2} \times a$

$= -\frac{a^2}{2}$

Correction de l'exercice 54 p 276

exercice 54 p 276

a) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB})$

$= a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (car SAB est équilatéral)

$= a^2 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ (car $(AH) \perp (DB)$)

c) $\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (car $(SH) \perp (AC)$)

d) $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{HI} \cdot (\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC})$

$= \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IC}$

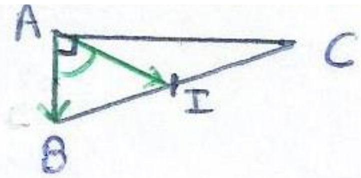
$= \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HI} + 0$ (car H est le projeté ortho de S sur (HI)). et $(HI) \perp (IC)$.

$= \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}$

$= \frac{a^2}{4}$

Correction de l'exercice 60 p 276

exercice 60 p 276.



1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$

donc $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2\times5 + 3\times(-3) + (-1)\times1$

$= 10 - 9 - 1$

$= 0$

d'où $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux

Ainsi : le triangle ABC est rectangle en A.

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}4,5\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\vec{AI}\begin{pmatrix}3,5\\0\\0\end{pmatrix}$

donc, d'une part $\vec{AB}\cdot\vec{AI} = 2\times3,5 + 3\times0 + (-1)\times0 = 7$

d'autre part, $\vec{AB}\cdot\vec{AI} = AB\times AI\times\cos(\widehat{BAI})$

or, $AB = \sqrt{2^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{14}$

$AI = \sqrt{3,5^2+0^2+0^2} = \sqrt{12,25}$

donc $\cos(\widehat{BAI}) = \dfrac{7}{\sqrt{14}\times\sqrt{12,25}} = \dfrac{7}{\sqrt{171,5}}$

d'où $\widehat{BAI} \simeq 1,01$ (valeur arrondie à 0,01 près)

(en mode RADIAN)