III] Intersection de droites et de plans

1) Intersection d'une droite et d'un plan

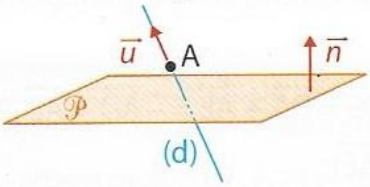
Propriétés Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

(1) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

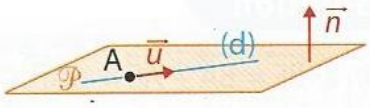
(2) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :

- si A appartient à $\mathcal{P}$, la droite (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$;
- si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, la droite (d) est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

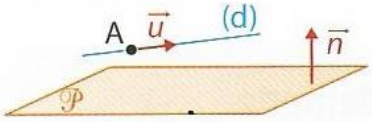
La droite est sécante au plan



La droite est incluse dans le plan



La droite est strictement parallèle au plan



98 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $7x + 2y - z + 4 = 0$.

Les droites (d_1) et (d_2) sont définies par une représentation paramétrique donnée ci-dessous :

$$(d_1)\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \cdot \quad (d_2)\begin{cases} x = 15 - 3t \\ y = -9 + t \\ z = 7 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

1. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (d_1) sont-ils sécants ?

2. Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (d_2).

exercice 98 p 278.

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1)

or, $\vec{n}\cdot\vec{u_1} = 7\times(-1)+2\times4+(-1)\times1 = 0$

donc (d_1) est parallèle à $\mathcal{P}$ (éventuellement contenue dans $\mathcal{P}$).

Ainsi : (d_1) et $\mathcal{P}$ ne sont pas sécants.

2) $\Omega\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P}\cap(d_2)$

ssi il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}7x+2y-z+4=0\\x=15-3t\\y=-9+t\\z=7+2t.\end{cases}$

or, $\begin{cases}7\times(15-3t)+2\times(-9+t)-(7+2t)+4=0\\x=15-3t\\y=-9+t\\z=7+2t\end{cases}$

$\begin{cases}84-21t=0\\x=15-3t\\y=-9+t\\z=7+2t\end{cases}$ $\begin{cases}t=4\\x=3\\y=-5\\z=15\end{cases}$

Ainsi : $\mathcal{P}$ et (d_2) sont sécants au point $\Omega\begin{pmatrix}3\\-5\\15\end{pmatrix}$.

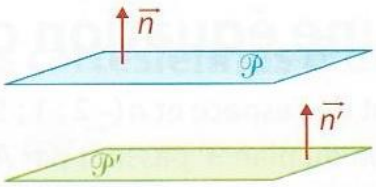
2) Intersection de deux plans

Propriétés Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

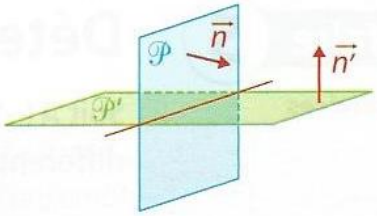
(1) Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

(2) Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants : leur intersection est une droite.

Les plans sont parallèles



Les plans sont sécants



Propriétés On se place dans un repère orthonormé.

(1) Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants si, et seulement si, $(a\,;b\,;c)$ n'est pas proportionnel à $(a'\,;b'\,;c')$.

(2) Lorsque a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une droite.

109 On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :

$$5x + 6y - 7z + 4 = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y + z = 0.$$

1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

exercice 109 p 279

1) $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.

or, $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires.

donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

2) Δ est caractérisée par $\begin{cases} 5x + 6y - 7z + 4 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5(2y - z) + 6y - 7z + 4 = 0 \\ x = 2y - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16y - 12z + 4 = 0 \\ x = 2y - z \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3} \\ x = 2y - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3} \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} z = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} \end{cases}$

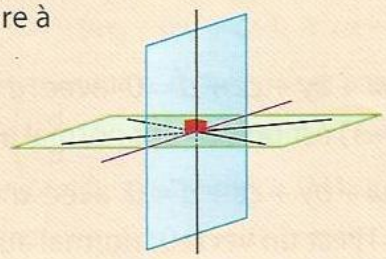
on choisit y comme paramètre en posant $y = t$.

ainsi une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3) Plans perpendiculaires

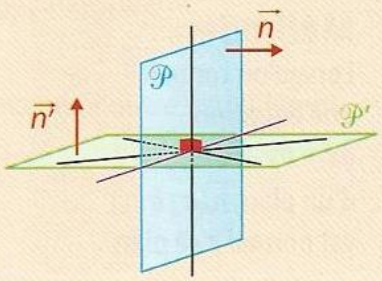
Définition

Deux plans sont dits perpendiculaires, si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.



Propriété

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.



120 Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives :

$$-4x+3y+z-5=0 \quad \text{et} \quad 5x+7y-z+3=0.$$

Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

exercice 120 p 280

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.

or, $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = (-4)\times 5 + 3\times 7 + 1\times(-1)$

$= -20 + 21 - 1 = \underline{\underline{0}}$.

d'où $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux

Ainsi : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

➔ Faire exercices 119 p 280, 111 p 279 et 121 p 280 puis vérifier vos réponses à l'aide des corrigés de chaque exercices

119 Soit $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans d'équations respectives :

$$-2x+y+z+1=0,\ \ x-2y+z+7=0 \ \text{ et } \ 3x-y+z-7=0.$$

1. a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2. a. Justifier que la droite Δ et le plan $\mathcal{P}_3$ sont sécants.

b. Déterminer le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}_3$.

111 Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :

$$4x-2y+6z-1=0 \ \text{ et } \ 6x-3y+9z-3=0$$

sont strictement parallèles.

121 Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives :

$$-11x+5y+6z-2=0 \ \text{ et } \ 4x-2y+9z+1=0.$$

Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 119 p 280

Exercice 119 p 280

1) ⓐ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires

donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

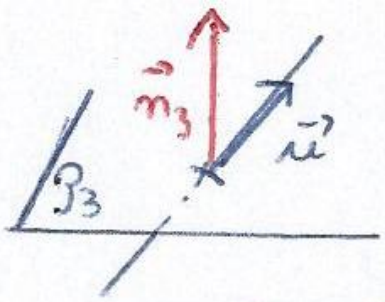
ⓑ Δ est caractérisé par $\begin{cases}-2x+y+z+1=0\\x-2y+z+7=0\end{cases}$

$$\begin{cases}-2(2y-z-7)+y+z+1=0\\x=2y-z-7\end{cases}$$

$$\begin{cases}3z=3y-15\\x=2y-z-7\end{cases} \qquad \begin{cases}z=y-5\\x=2y-z-7\\\quad=y-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-2+t\\y=t\\z=-5+t.\end{cases}$$

2) ⓐ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige Δ



$\vec{n}_3\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$

or, $\vec{u}\cdot\vec{n}_3 = 1\times 3 + 1\times(-1) + 1\times 1 = 3 \neq 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas orthogonaux

d'où Δ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants.

ⓑ $\Omega\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Delta \cap \mathcal{P}_3$

ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} 3x - y + z - 7 = 0 \\ x = -2 + t \\ y = t \\ z = -5 + t \end{cases}$

$$\begin{cases} 3\times(-2+t) - t + (-5+t) - 7 = 0 \\ x = -2 + t \\ y = t \\ z = -5 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t = 18 \\ x = -2 + t \\ y = t \\ z = -5 + t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 3 \\ x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Ainsi : Δ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants au point $\Omega\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 111 p 279

Exercice 111 p 279.

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.

Or, $\vec{n_2} = \frac{2}{3}\vec{n_1}$ donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires

Ainsi : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

De plus $(0;1;0) \in \mathcal{P}_2$ et $(0;1;0) \notin \mathcal{P}_1$ donc $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$.

Ainsi : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont strictement parallèles.

Correction de l'exercice 121 p 280

exercice 121 p 280

$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.

or, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -11 \times 4 + 5 \times (-2) + 6 \times 9 = 0$

donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux

Ainsi : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.