Corrigé des exercices de révision sur les complexes (QCM BAC)

1) $z = (1+i)^4 = z_1^4$ avec $z_1 = 1+i$

$r_1 = |z_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Avec $\theta_1 = \arg(z_1)$,

on a : $\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

d'où $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

puis $|z| = |z_1^4| = |z_1|^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$

et $\arg(z) = \arg(z_1^4) = 4\arg(z_1) = \cancel{4} \times \frac{\pi}{\cancel{4}} = \pi$

Ainsi : $z = 4e^{i\pi}$ → réponse ⓑ est VRAIE (et les autres fausses)

2) $|z-1+i| = |\sqrt{3}-i|$ avec $z = x+iy$

$|(x+iy)-1+i| = |\sqrt{3}-i|$

$|(x-1)+i(y+1)| = |\sqrt{3}-i|$

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}$

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{3+1}$

$(x-1)^2+(y+1)^2 = 4$ } on met au carré.

→ réponse ⓒ est VRAIE (et les autres fausses)

3) * Pour la ⓐ et ⓒ il faut étudier la suite $u_n = |z_n|$.

(car $|z_n| = OM_n$ (distance entre M_n et l'origine))

$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{1+i}{2}\right) \times z_n\right|$

$= \left|\frac{1+i}{2}\right| \times |z_n|$ "$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$"

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \times |z_n|$ (car $\frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$)

$= \sqrt{\frac{1}{2}} \times u_n$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times u_n$ (car $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

donc (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1er terme $u_0 = |z_0| = |1+i| = \sqrt{2}$

d'où $u_n = (1^{\text{er}}\text{ terme}) \times \text{raison}^{\neq\text{ce des rangs}}$

$= u_0 \times q^n$

$= \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

Donc $u_n \neq \sqrt{2}$ dès que $n \geq 1$

(réponse ⓐ est FAUSSE)

Ensuite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$)

} Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Ainsi : (u_n) converge vers 0.

(réponse ⓒ est VRAIE)

* Étudions le triangle OM_1M_2

Pour cela, il faut calculer

$z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \left(\frac{1+i}{2}\right) \times (1+i) = i$

$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \left(\frac{1+i}{2}\right) \times i = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

puis
- $OM_1 = |z_1 - z_O| = |i-0| = |i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$
- $OM_2 = |z_2 - z_O| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-0\right|$

$= \left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

or, $OM_1 \neq OM_2$

donc OM_1M_2 ne peut pas être équilatéral

→ réponse ⓑ est FAUSSE

* Étudions le quotient :

$z = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_n} = \frac{\left(\frac{1+i}{2}\right)z_n - z_n}{z_n}$

$= \frac{\cancel{z_n}\left(\left(\frac{1+i}{2}\right)-1\right)}{\cancel{z_n}}$

$= \frac{1+i}{2} - 1$

$= \frac{-1+i}{2}$

$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$r = |z| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Avec $\theta = \arg(z)$

on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1/2}{\sqrt{2}/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

d'où $\theta = \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$ (réponse d) est FAUSSE)

Pour la réponse d), il faut calculer l'affixe du milieu de [BC] :

$\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{(2-2i)+(1+5i)}{2} = \frac{3+3i}{2}$

$= 1,5 + 1,5i \neq 2i$

z affixe de M

donc réponse d) est FAUSSE

4) $z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1+5i)-(-1-i)}{(2-2i)-(-1-i)}$

$= \frac{(2+6i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{20i}{10} = 2i$

(réponse a) est FAUSSE car c'est un imaginaire pur)

Pour connaître la nature du triangle ABC il faut se servir du module et de l'argument de z.

$r = |z| = |2i| = 2$

$\theta = \arg(z)$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{2} = 0 \\ \sin\theta = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.

interprétation module	interprétation argument
$\lvert z\rvert = 2$	$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
$\left\lvert\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 2$	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$
$\frac{\lvert z_C - z_A\rvert}{\lvert z_B - z_A\rvert} = 2$	$(\vec{AB} ; \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$
$\frac{AC}{AB} = 2$	donc ABC est rectangle en A
$AC = 2AB$	(réponse c) est VRAIE)
donc $AC \neq AB$ donc ABC non isocèle en A (réponse b) est FAUSSE)	

5) $i\frac{z_1}{z_2} = i\frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ " $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ "

$= i\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}}$

$= i\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$

"calculer forme exponentielle de i"

$= e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{3} \times e^{i\frac{7\pi}{12}}$ $\left(i = e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$

$= \sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{2}+i\frac{7\pi}{12}}$

$= \sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$\longrightarrow$ réponse d) est VRAIE (et les autres sont fausses)