DEVOIR MAISON VACANCES DE PÂQUES

(à rendre pour le jeudi 30 Avril en main propre ou par mail au format PDF suivant la situation)

<u>**Exercice 1**</u> : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est <u>vraie</u> ou <u>fausse</u> et <u>justifier chaque réponse</u>. Une réponse non justifier ne sera pas prise en compte.

On se place dans un repère orthonormé.

On considère la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

On considère les points $A(1\,;1\,;0)$, $B(3\,;0\,;-1)$ et $C(4\,;3\,;1)$

<u>Proposition 1 :</u>

Le point C appartient à la droite D.

<u>Proposition 2 :</u>

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D.

<u>Proposition 3 :</u>

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 5 - 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = -2 + t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

<u>Proposition 4 :</u>

Les droites D et (AB) sont coplanaires.

<u>Proposition 5 :</u>

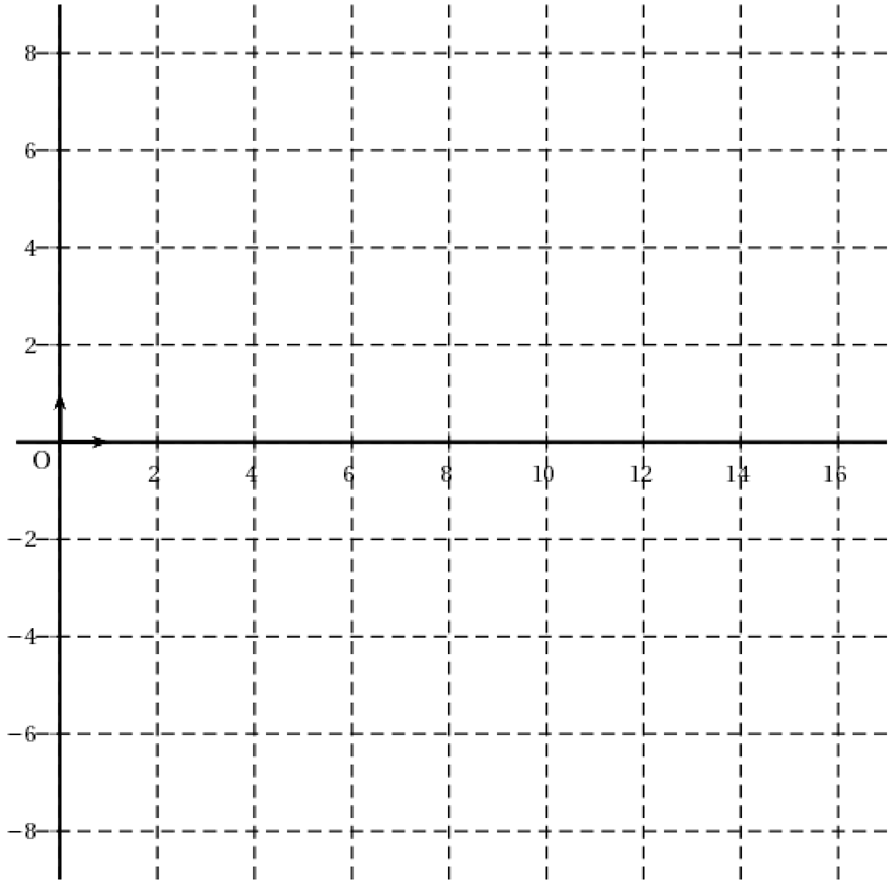
La droite D et le plan (ABC) sont sécants.

Exercice 2 : NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée ci-dessous, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.



3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
5. On note $\ell^n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell^n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
   b. Déterminer , par le calcul, le plus petit entier n tel que $\ell^n \geqslant 1000$.

Exercice 3 : LOIS DE PROBABILITES

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.
À la sortie de fabrication, 5 % d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.
On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte.
On note L l'évènement « La puce est livrée ».
On note C l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1 000 heures ».
Étant donné deux évènements A et B, on note $P_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.
   - **a.** Donner la valeur $P_L(C)$.
   - **b.** Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?
   - **c.** Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine de fabrication ?

   Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   - **a.** Montrer que $\lambda = \dfrac{-\ln(0,98)}{1000}$.
   - **b.** Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10 000 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
   - **c.** Calculer $P(20000 \leqslant X \leqslant 30000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à 0,003.
   On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées- On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.
   On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.
   - **a.** Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15000$ et $p = 0,003$.
   - **b.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.
   - **c.** Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.