Chapitre - 17 – Lois à densités (Partie II)

Rappels : Lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi de densité f alors on calcule les probabilités liées à X grâce à l'intégrale de sa densité.

En effet, on a vu que l'on avait : $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

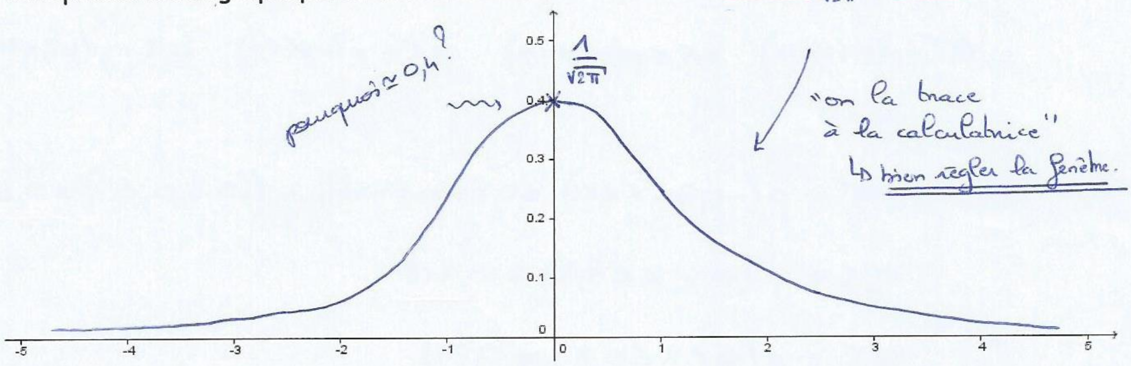
Ainsi, $p(a \leq X \leq b)$ correspond à l'aire sous la courbe de f entre a et b.

I] Loi normale centrée réduite $N(0;1)$

1) Définition et premières propriétés

Définition : Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, noté $N(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Voici la représentation graphique de cette densité :



Remarques :

- L'exponentielle étant st ⊕ la courbe se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre.
- On parle de courbe " en cloche ".

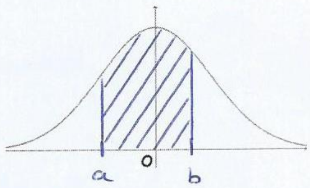
Propriétés : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

(1) f est continue et positive sur ℝ.
(2) L'aire totale sous la courbe est égale à 1
} c'est une densité
(3) La courbe est SYMÉTRIQUE par rapport à l'axe des ordonnées

2) Utilisation de la calculatrice

a) Pour calculer une probabilité $p(a \leq X \leq b)$ lorsque l'on connaît a et b.

Schématiquement : On cherche à déterminer l'aire sous la courbe entre a et b.



Instruction à la calculatrice : $\underbrace{2^{nd} + \text{var}}_{\text{distrib}}$, 2 : normalFrép(a , b , 0 , 1)

paramètres de la loi

en recherche

Exemple : X suit la loi normale $N(0;1)$, on a :

- $p(1 < X \leq 2) =$ normalFrép(1, 2, 0, 1) $\approx$ 0,136
- $p(-0,5 < X \leq 1,3) =$ normalFrép(-0.5, 1.3, 0, 1) $\approx$ 0,594
- $p(-1,5 \leq X < -0,5) =$ normalFrép(-1.5, -0.5, 0, 1) $\approx$ 0,242

⊕ cohérence avec le graphique

Commande à la calculatrice : NormalFrép(a,b, 0, 1) ou Normalcdf(a,b, 0, 1)

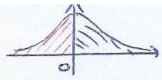
lower : a (valeur minimum de X)

upper: b (valeur maximum de X)

μ : 0

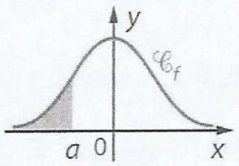
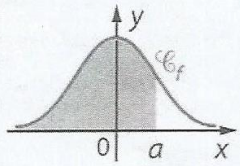
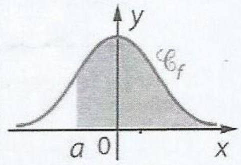
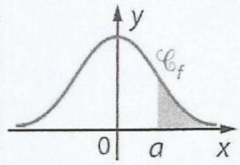
σ: 1

"OK ! quand on a 2 termes, mais quand on en a plus qu'une ...." on peut pas mettre ±∞ ...



Remarque : Du fait de la symétrie de la courbe de la densité , on a : $p(X \leq 0) = p(X \geq 0) =$ 0,5

Les calculatrices ne fournissant que des probabilités sous la forme $p(a \leq X \leq b)$, on utilisera la méthode décrite dans le tableau ci-dessous pour les calculs du type $p(X < a)$ ou $p(X > a)$.

Probabilité	$P(X<a)$ pour $a<0$	$P(X<a)$ pour $a>0$	$P(X>a)$ pour $a<0$	$P(X>a)$ pour $a>0$
Graphique	 $a<0$	 $a>0$	 $a<0$	 $a>0$
Calcul	$0{,}5 - p(a<X<0)$	$0{,}5 + p(0<X<a)$	$0{,}5 + p(a<X<0)$	$0{,}5 - p(0<X<a)$

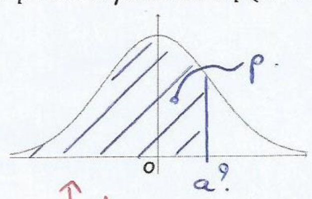
en recherch

Exemple : X suit la loi normale $N(0\,;1)$, on a :

- $p(X > -0{,}3) =$ $0{,}5 + p(-0{,}3<X<0) = 0{,}5 +$ normalFrep$(-0.3, 0, 0, 1) \simeq 0{,}618$
- $p(X \leq 1{,}4) =$ $0{,}5 + p(0<X<1{,}4) \simeq 0{,}919$
- $p(X \geq 0{,}8) =$ $0{,}5 - p(0<X<0{,}8) \simeq 0{,}212$
- $p(X < -0{,}6) =$ $0{,}5 - p(-0{,}6<X<0) \simeq 0{,}274$

b) Pour déterminer la valeur de a lorsque l'on connaît la probabilité p correspondant à $p(X \leq a)$

Schématiquement : On cherche à déterminer le seuil a pour que l'aire sous la courbe avant a soit égale à p



Instruction à la calculatrice : 2[nd] + var , 3 : FracNormale(p , 0 , 1)

⚠ $p = p(X \leq a)$ et rien d'autre.

en recherch

Exemple : X suit la loi normale $N(0\,;1)$.

- Déterminer le réel a tel que : $P(X \leq a) = 0{,}7$

  $a =$ FracNormale$(0.7, 0, 1) \simeq 0{,}524$

- Déterminer le réel b tel que : $P(X < b) = 0{,}4$

  $b =$ FracNormal$(0.4, 0, 1) \simeq -0{,}253$

- Déterminer le réel c tel que : $P(X \geq c) = 0{,}2$ donc $p(X \leq c) = 0{,}8$

  d'où $c =$ FracNormale$(0.8, 0, 1) \simeq 0{,}842$

- Déterminer le réel d tel que : $P(-d \leq X \leq d) = 0{,}95$ donc $p(X \leq d) = 0{,}975$

  d'où $d =$ FracNormal$(0.975, 0, 1) \simeq 1{,}96$

⚠ $p(-d \leq X \leq d) + \frac{1 - p(-d \leq X \leq d)}{2} = \frac{p(-d \leq X \leq d) + 1}{2}$ "on rajoute la moitié du reste"

Fracnormale peut-être remplacé par **invNorm** sur certaine calculatrice !
Attention **certaine** calculatrice vous laisse le choix de la **ZONE** (elle n'impose pas de connaître $p(X \leq a)$ (zone de gauche)).
Exemple : Pour $P(X \geq c) = 0{,}2$ vous pouvez faire $Fracnormale(0.2, 0, 1, droite)$ en choisissant la ZONE de DROITE (vous obtiendrez alors directement la bonne réponse).
Exemple : Pour $P(-d \leq X \leq d) = 0{,}95$ vous pouvez faire $Fracnormale(0.95, 0, 1, centre)$ en choisissant la ZONE du CENTRE (vous obtiendrez alors directement la bonne réponse).

Faire les exercices 73,74 et 76 p 339

Dans les exercices 73 et 74 p 339,

X suit la loi normale N(0 ; 1)

73 Calculer les probabilités suivantes :

a. $P(-6 < X < 0)$

b. $P(X > 12)$

c. $P(X = \mathrm{e})$

d. $P(X < \mathrm{e})$

e. $P\left(-\sqrt{2} < X < \sqrt{3}\right)$

f. $P_{X>0}(X \leqslant 1,5)$

74 **1.** Déterminer le réel a tel que $P(X < a) = \frac{1}{3}$.

2. Déterminer le réel b tel que $P(X > b) = \frac{3}{7}$.

3. Déterminer le réel c tel que $P(-c < X < c) = \frac{9}{11}$.

76 La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.
Déterminer le réel $u_{0,2}$ tel que $P(-u_{0,2} \leqslant X \leqslant u_{0,2}) = 0,8$.

Correction des exercices 73,74 et 76 p 339

exercice 73 p 339

a) $p(-6<X<0) = \text{NormalFrep}(-6,0,0,1) \simeq \underline{0,500}$

b) $p(X>12) = 0,5 - p(0<X<12)$
$\simeq \underline{0}$

c) $p(X=e) = 0$ (loi à densité)

d) $p(X<e) = 0,5 + p(0<X<e)$
$\simeq \underline{0,997}$

e) $p(-\sqrt{2}<X<\sqrt{3}) \simeq \underline{0,880}$

f) $P_{(X>0)}(X\leq 1,5) = \dfrac{p((X>0)\cap(X\leq 1,5))}{p(X>0)}$

$= \dfrac{p(0<X\leq 1,5)}{p(X>0)}$

$= \dfrac{\text{NormalFrep}(0,1.5,0,1)}{0,5}$

à taper ensemble pour éviter de cumuler les arrondies

$\simeq \underline{0,866}$

exercice 74 p 339

1) $p(X<a) = \frac{1}{3}$

donc $a = \text{Fracnormale}\left(\frac{1}{3},0,1\right)$
$\simeq \underline{-0,431}$

2) $p(X>b) = \frac{3}{7}$ donc $p(X<b) = \frac{4}{7}$

d'où $b = \text{Fracnormale}\left(\frac{4}{7},0,1\right)$
$\simeq \underline{0,180}$

3) $p(-c \leq X \leq c) = \frac{9}{11}$

donc $p(X\leq c) = \frac{10}{11}$

d'où $c = \text{Fracnormale}\left(\frac{10}{11},0,1\right)$
$\simeq \underline{1,335}$

exercice 76 p 339

$P(-u_{0,2} \leq X \leq u_{0,2}) = 0,8$

donc $2P(X \leq u_{0,2}) - 1 = 0,8$

$P(X \leq u_{0,2}) = \frac{1,8}{2}$

$P(X \leq u_{0,2}) = 0,9$

puis $u_{0,2} = \text{Fracnormale}(0.9,0,1)$
$\simeq \underline{1,282}$

$\square\ p(-a \leq X \leq a) = 1 - 2p(X \leq -a)$
$= 1 - 2\times(1 - p(X \leq a))$
$= 1 - 2 + 2p(X \leq a)$
$= 2p(X \leq a) - 1 \quad \square$

démonstration

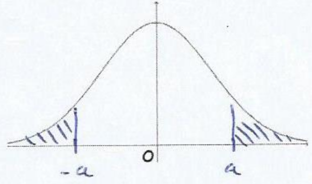
③

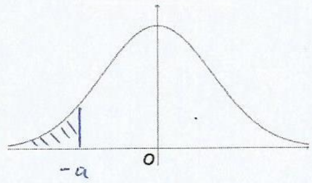
3) Propriétés de la loi normale $N(0;1)$

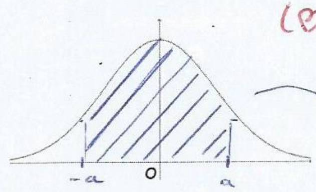
a) Règles de calculs

Propriété : Pour tous les réels a, on a :

(1) $P(X \leq -a) =$ $p(X \geq a)$ (2) $P(X \leq -a) =$ $1 - p(X \leq a)$ (3) $P(-a \leq X \leq a) =$ $2P(X \leq a) - 1$ (♡)







"intéressant de savoir exprimer en fonction de $p(X \leq a)$ à cause du Fracnormale..."

b) Valeurs remarquables liées à la loi normale centrée réduite

Théorème : Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

"ce dernier cas va nous intéressé pour la suite".

Démonstration : (ROC au BAC)

$\square$ Soit $\alpha \in]0;1[$, on pose $G(t) = P(-t \leq X \leq t)$

on a : $G(t) = 2P(0 \leq X \leq t) = 2\int_0^t f(x)\,dx$ d'où $G'(t) = 2f(t)$

or, $f(x) > 0$ donc $G'(t) > 0$ et on a :

donc G st croissant sur $]0;+\infty[$

t	0 $\quad u_\alpha \quad$ $+\infty$
$G(t)$	$0 \nearrow 1-\alpha \nearrow 1$

de plus, $G(0) = 2\times\int_0^0 f(x)\,dx = 0$

$\lim\limits_{t\to+\infty} G(t) =$ "aire totale sous la courbe de f" $= 1$ et $1-\alpha \in]0;1[$

donc d'après le TVI, il existe un unique $u_\alpha \in]0;+\infty[$ tel que : $G(u_\alpha) = 1-\alpha$

Ainsi : il existe un unique réel strictement positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ $\square$

En pratique, pour déterminer ce u_α pour une valeur de α donnée, on utilisera la méthode suivante:

On sait que : $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) =$ $1-\alpha$ donc d'après (3) on a : $2P(X \leq u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$ (d'après (3))

donc $2P(X \leq u_\alpha) = 2 - \alpha$

donc $P(X \leq u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Et enfin, avec la calculatrice on en déduit que : $u_\alpha =$ $\text{Fracnormale}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$

Exercice : X suit la loi normale $N(0;1)$

Déterminer $u_{0,05}$ tel que $P(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 0,95$ (remarque : ici $\alpha = 0,05$)

recherche

$P(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 0,95$ donc $2P(X \leq u_{0,05}) - 1 = 0,95$

"comme vous voulez, le tout étant de passer de l'un à l'autre" cela revient à rajouter $\frac{1}{2}$ du $\frac{1}{2}$ rest. d'où $P(X \leq u_{0,05}) = \dfrac{1,95}{2}$

"cohérence avec la question que l'on s'était posé !"

donc $P(X \leq u_{0,05}) = 0,975$, d'où $u_{0,05} = \text{FracNormale}(0.975, 0, 1) \simeq 1,96$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(0;1)$.

Alors : L'espérance de la variable X vaut ..0.... (c'est pour cela qu'on dit qu'elle est ..CENTRÉE......)

L'écart-type de la variable X vaut ..1.... (c'est pour cela qu'on dit qu'elle est ..RÉDUITE.....)